

# Dijagrami interakcije za proračun armature stupova

Zorislav Sorić, Ana Mandić

## Ključne riječi

armatura,  
armiranobetonski stup,  
proračun,  
Ehlersov postupak,  
Eurokod 2,  
Eurokod 8,  
dijagram interakcije

## Key words

reinforcement,  
reinforced-concrete pier,  
design, Ehlers procedure,  
Eurocode 2,  
Eurocode 8,  
interaction diagram

## Mots clés

armature,  
poteau en béton armé,  
calcul,  
procédé d'Ehlers,  
Eurocode 2,  
Eurocode 8,  
diagramme d'interaction

## Ключевые слова:

арматура, расчёт,  
железобетонный столб,  
способ Ehlers-a,  
Eurocode 2, Eurocode 8  
диаграмма  
взаимодействия

## Schlüsselworte:

Bewehrung,  
Stahlbetonstütze,  
Berechnung,  
Verfahren nach Ehlers,  
Eurokode 2,  
Eurokode 8,  
Interaktionsdiagramm

Z. Sorić, A. Mandić

## Dijagrami interakcije za proračun armature stupova

U članku je prikazana analiza područja primjene postupka proračuna stupova prema Ehlersu na temelju koje su nacrtani dijagrami interakcije i uspoređeni s tzv. klasičnim dijagramima. Primijenjeni su uvjeti Eurokoda 2 o minimalnoj i maksimalnoj armaturi. Upozorava se na djelovanje momenta savijanja i tlačne sile kad Ehlersov postupak daje neadekvatnu armaturu. Određena su i dopuštena područja dijagrama interakcije prema Eurokodu 8, s obzirom na ograničenja veličine tlačne sile

Z. Sorić, A. Mandić

Subject review

## Interaction diagrams for pier reinforcement design

The analysis of the area in which pier design according to Ehlers can be applied is presented, and the resulting interaction diagrams are compared with the so called traditional diagrams. Eurocode 2 requirements concerning minimum and maximum reinforcement are applied. The attention is drawn to the bending moment and compressive force action in cases when Ehlers procedure results in an inadequate reinforcement. Allowable interaction diagram areas are defined according to Eurocode 8, taking into account limitations with respect to the value of compressive force.

Z. Sorić, A. Mandić

Ouvrage de synthèse

## Diagrammes d'interaction pour le calcul de l'armature des poteaux

L'article présente une analyse du champ d'application du procédé de calcul des poteaux selon Ehlers, au terme de laquelle ont été dessinés les diagrammes d'interaction, comparés avec les diagrammes dits classiques. Les conditions de l'Eurocode 2 relatives à l'armature minimale et maximale ont été appliquées. On souligne l'importance de l'action des moments de flexion et de la force de compression lorsque le procédé d'Ehlers fournit une armature non conforme. On délimite aussi les zones admises du diagramme d'interaction selon Eurocode 8, compte tenu des limitations de la grandeur de la force de compression.

З Сориц, А Мандич

Обзорная работа

## Диаграммы взаимодействия для расчета арматуры

В работе дается анализ области применения способа расчёта столбов, согласно методу Ehlers-a на основании которого сделаны диаграммы взаимодействия и сравнены с так называемыми, классическими диаграммами. Применены условия Eurocode-a 2 о минимальной и максимальной арматуре. Предупреждается о действии момента изгиба и силе давления, когда способ Ehlers-a даёт неадекватную арматуру. Определены и допустимые области диаграммы взаимодействия, согласно Eurocode-y 8 принимая во внимание ограничения величины силы давления.

Z. Sorić, A. Mandić

Übersichtsarbeit

## Interaktionsdiagramme für die Berechnung der Stützenbewehrung

Im Artikel ist eine Analyse der Anwendungsbereichs der Stützenberechnung nach Ehlers dargestellt. Auf Grund dieser Analyse sind Interaktionsdiagramme gezeichnet und mit den sg. klassischen Diagrammen verglichen. Angewendet wurden die Bedingungen des Eurokode 2 über die minimale und maximale Bewehrung. Es wird auf die Wirkung des Biegemoments und der Druckkraft hingewiesen, im Fall dass das Verfahren nach Ehlers unadequate Bewehrung ergibt. Es sind auch die zulässigen Bereiche der Interaktionsdiagramme nach Eurokode 8 festgelegt, in Anbetracht der Grössenbegrenzung der Druckkraft.

Autori: Prof. dr. sc. **Zorislav Sorić**, dipl. ing. građ.; **Ana Mandić**, dipl. ing. građ., Građevinski fakultet Sveučilišt u Zagrebu, Kačićeva 26

## 1 Uvod

Armiranobetonski stupovi kao elementi konstrukcija izloženi su složenom naprezanju koje nastaje istodobnim djelovanjem momenata savijanja oko jedne ili oko obje glavne osi presjeka i uzdužne sile, tj. ekscentričnom naprezanju. Među građevinskim inženjerima u praksi popularno je nekoliko načina proračunavanja armature betonskih presjeka koji su izloženi takvom djelovanju. Postoje postupci proračuna armature stupova [1, 2, 3, 4], postupci s pomoću tablica [5, 6, 9] i postupci s dijagramima interakcije [7, 11, 12, 15, 18]. Naravno da se i tablični postupci i oni s pomoću dijagrama interakcije zasnivaju na proračunima armature betonskog presjeka. Prije izrade interakcijskih dijagrama jedan od popularnih načina proračuna bio je postupak prema Ehlersu [4] i/ili prema Wuczkowskom [15]. Valja uočiti da se primjenom proračuna bez interakcijskih dijagrama gubi osjećaj za nosivost presjeka za određenu kombinaciju djelovanja momenta savijanja i uzdužne sile. S druge pak strane, interakcijski dijagrami kao krivulje nosivosti presjeka daju sliku unutar koje vrijede kombinacije momenata savijanja i uzdužne sile. Ovi dijagrami određuju koeficijente armiranja presjeka. Osim toga, dijagrami interakcije ograničeni su još i propisima određenim minimalnim i maksimalnim armaturama [10] te dopuštenim naprezanjem od uzdužne sile [13]. Zbog karaktera djelovanja horizontalnih sila i vibracija konstrukcije vlačno i tlačno područje presjeka stupa često mijenja položaj. Radi toga, a i zbog opasnosti zamjene tlačne vlačnom armaturom, presjek stupa nije uvijek dobro armirati nesimetrično, nego je bolje armirati ga simetrično, tj. uzdužnom armaturom iste površine smještenom uz nasuprotne stranice pravokutnog presjeka.

Ako se za proračun armature ne rabe dijagrami interakcije, tada se može dogoditi da se postupkom prema Ehlersu (ili prema Wuczkowskom) ne dobiju točni rezultati. U praksi je ustanovljeno da su ovim metodama rezultati ponekad vrlo slični, a nekad su odstupanja tolika da se jednim postupkom dobije određena površina armature, a drugim tzv. "negativna armatura".

Da bi se dijagrami interakcije mogli razlikovati, jedan je nazvan po Ehlersu a drugi, čije se izvedenice nalaze u literaturi, nazvan je tzv. "klasični".

### 1.1 Osnovne postavke proračuna

Proračun se provodi prema graničnom stanju nosivosti po europskoj normi ENV 1992-1-1 [10], (Eurokod 2, tj. EC 2), uza sve oznake koje se u njoj rabe. To je samo jedna od razlika u odnosu prema članku [18] koji je rađen prema PBAB-u. Proračun se zadržava na razini presjeka. Analiziraju se stupovi pravokutnih poprečnih presjeka i vitkosti  $\lambda$  manje od 25, dakle ne uzima se u obzir izvijanje.

## Oznake prema EC2

Oznaka	Značenje
$\xi$	koeficijent položaja neutralne osi
$\zeta$	koeficijent kraka unutrašnjih sila
$A_{s1}$	površina vlačne armature
$A_{s2}$	površina tlačne armature
$\alpha_v$	koeficijent punoće dijagrama tlačnih naprezanja u betonu
$k_a$	koeficijent položaja rezultante tlačnih naprezanja
$M_{Sd}$	računski moment savijanja
$M_{Sds}$	računski moment savijanja s obzirom na težište vlačne armature
$M_{Rds,lim}$	računski moment savijanja koji presjek može prihvatiti bez tlačne armature
$N_{Sd}$	računska uzdužna sila
$\varepsilon_{s1}$	relativna deformacija vlačne armature
$\varepsilon_{s2}$	relativna deformacija tlačne armature
$\varepsilon_c$	relativna deformacija betona
$x$	udaljenost neutralne osi od tlačnog ruba presjeka
$\sigma_c$	naprezanje u betonu
$\sigma_{s1}$	naprezanje u vlačnoj armaturi
$\sigma_{s2}$	naprezanje u tlačnoj armaturi
$b$	širina presjeka
$h$	ukupna visina presjeka
$d$	statička visina presjeka
$\mu_{Sd}$	bezdimenzijska veličina momenta savijanja
$V_{Sd}$	bezdimenzijska veličina uzdužne sile
$\omega$	mehanički koeficijent armiranja

Dimenzioniranje presjeka takvih stupova može se provesti između ostalih i sljedećim dvjema metodama;

- određivanje armature postupkom prema Ehlersu uz upotrebu odgovarajućih tablica koje se rabe pri proračunu na savijanje i dijagramima interakcije iz ovog članka te
- određivanje armature po tzv. klasičnim dijagramima interakcije.

U ovom radu će se odrediti područje u kojem se ta dva postupka poklapaju, kao i područje u kojem je očito odstupanje. Uz već postojeće dijagrame interakcije [12] i [15], ovdje će se odrediti i dijagrami interakcije koji odgovaraju postupku dimenzioniranja prema Ehlersu. Provest će se analiza prema graničnom stanju nosivosti po ENV 1992-1-1 [10], uz ograničenja iz ENV 1998-1-3 (Eurokod 8, tj. EC 8) [13].

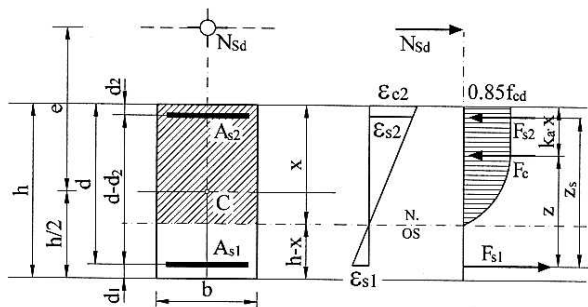
Daje se prikaz armiranja simetričnom armaturom. Rabiće se rebrasta armatura RA-400/500.

Određivanje parametara potrebnih za konstruiranje dijagrama koji će se primijeniti za proračun armature navedeno

je dalje u tekstu. Dijagrami interakcije se iscrtavaju s pomoću računalnog programa Microsoft Excel '97 [17].

## 2 Određivanje parametara za proračun armature pravokutnih ekscentrično opterećenih stupova

Na slici 1. prikazan je presjek stupa opterećen ekscentričnom uzdužnom silom te dijagrami relativnih deformacija ( $\varepsilon$ ), tlačnih napreznja u betonu i unutarnjih sila, s oznakama dimenzija i ostalih veličina po EC 2.



Slika 1. Poprečni presjek, oznake dimenzija, dijagrami relativnih deformacija i napreznja, rezultante tlačnih i vlačnih napreznja

U proračunu se pretpostavljaju omjeri visine presjeka stupa  $h$  i statičke visine  $d = 0,9 h$ , tj. udaljenost armature od bližeg ruba  $d_1 = d_2 = 0,1 h$ .

Sa svim poznatim relativnim deformacijama proračuna se koeficijent položaja neutralne osi  $\xi$ , koeficijent kraka unutarnjih sila  $\zeta$ , koeficijent punoće dijagrama  $\alpha_v$  i koeficijent položaja tlačne sile  $k_a$ , za  $0 < |\varepsilon_{c2}| \leq 0,002$ .

$$\xi = \frac{|\varepsilon_{c2}|}{|\varepsilon_{c2}| + \varepsilon_{s1}}, \quad (1)$$

$$\alpha_v = \frac{1000|\varepsilon_{c2}|}{12} (6 - 1000|\varepsilon_{c2}|), \quad (2)$$

$$k_a = \frac{8 - 1000|\varepsilon_{c2}|}{4(6 - 1000|\varepsilon_{c2}|)}, \quad (3)$$

no ako je  $0,0020 \leq \varepsilon_{c2} \leq 0,0035$  tada je:

$$\alpha_v = \frac{3000|\varepsilon_{c2}| - 2}{3000|\varepsilon_{c2}|}, \quad (4)$$

$$k_a = \frac{1000|\varepsilon_{c2}|(3000|\varepsilon_{c2}| - 4) + 2}{2000|\varepsilon_{c2}|(3000|\varepsilon_{c2}| - 2)}. \quad (5)$$

Uz poznate relativne deformacije vlačne armature  $\varepsilon_{s1}$  i betona  $\varepsilon_{c2}$  određuju se napreznja u vlačnoj i tlačnoj armaturi:

$$\sigma_{s1} = \varepsilon_{s1} \cdot E_s \leq f_{yd}, \quad \sigma_{s2} = \varepsilon_{s2} \cdot E_s \leq f_{yd}, \quad (6)$$

gdje je relativna deformacija tlačne armature:

$$\varepsilon_{s2} = \frac{\varepsilon_{c2}}{x} (x - d_2), \quad (7)$$

a položaj neutralne osi dan je izrazom:

$$x = \xi \cdot d. \quad (8)$$

Krak unutarnjih sila

$$z = \zeta \cdot d, \quad (9)$$

gdje je:

$$\zeta = 1 - k_a \cdot \xi. \quad (10)$$

### 2.1 Određivanje dijagrama interakcije postupkom Ehlersa

Koliko je autorima poznato, do sad nitko nije izradio dijagrame interakcije za elemente naprezane ekscentričnim tlakom prema postupku Ehlersa rabeći oznake i uvjete iz ENV 1992-1-1. Pri određivanju dijagrama interakcije rabe se omjeri dimenzija presjeka prikazani na slici 1. Varira se mehanički koeficijent armiranja,  $\omega$ , od 0,05 do 1,00 pri čemu se za jednaki mehanički koeficijent armiranja mijenjaju vrijednosti bezdimenzijske veličine uzdužne sile  $v_{sd}$ . S takvim ulaznim podacima traži se bezdimenzijska veličina momenta savijanja  $\mu_{sd}$  koja bi uz zadanu bezdimenzijsku veličinu uzdužne sile davala pretpostavljeni mehanički koeficijent armiranja.

Pretpostavka postupka Ehlersa je sljedeća:

Presjek stupa opterećen uzdužnom silom i početnim momentom savijanja prevodi se u presjek na kojem uzdužna sila djeluje u težištu "vlačne" armature uz ukupni moment savijanja koji se dobiva zbrajanjem početnog i dodatnog momenta savijanja. Dodatni moment savijanja nastaje zbog prenošenja uzdužne sile iz težišta presjeka u težište "vlačne" armature. Nakon toga djelovanje na presjek može se uzeti kao zbroj dvaju stanja djelovanja:

- na presjek djeluje samo ukupni moment savijanja (bez uzdužne sile),
- na presjek djeluje samo uzdužna sila, i to u težištu "vlačne" armature, tako da se toj sili odupire samo "vlačna" armatura.

U slučaju b) radi se pogreška jer se toj sili ne odupire samo "vlačna" armatura nego čitav presjek, ali to postupak Ehlersa ne uzima u obzir. Ako je uzdužna sila  $N$  mala time se ne čini velika pogreška.

Odvojeno se promatraju dva slučaja:

- U presjeku nije potrebna tlačna armatura, tj. ukupni proračunski moment savijanja manji je ili jednak naj-

većem momentu savijanja za jednostruko armiran presjek,  $M_{Sds} \leq M_{Rds,lim}$ , ali, s obzirom na to da je riječ o stupovima, postavlja se simetrična armatura  $A_{s1} = A_{s2}$ .

- 2) U presjeku je potrebna tlačna armatura, tj. ukupni računski moment savijanja veći je od najvećeg momenta savijanja za jednostruko armirani presjek,  $M_{Sds} > M_{Rds,lim}$ .

### 2.1.1 Računski moment savijanja manji je ili jednak najvećem momentu savijanja za jednostruko armirani presjek, $M_{Sds} \leq M_{Rds,lim}$

Najveći moment savijanja za jednostruko armirani presjek jest:

$$M_{Rds,lim} = \mu_{Rds,lim} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} \quad (11)$$

Za razrede betona C12/15 do C35/45, pri  $M_{Sds} \leq M_{Rds,lim}$ , EC2 dopušta najveći omjer tlačnog područja i statičke visine  $\xi = x/d = 0,45$ . Slijedi:  $\varepsilon_{c2} / \varepsilon_{s1} = -3,5/4,28\text{‰}$  (slika 1.),  $\mu_{Rds,lim} = 0,252$  i  $\zeta_{lim} = 0,811$ .

Za razrede betona C40/50 i više, EC2 dopušta  $\xi = x/d = 0,35$ :  $\varepsilon_{c2} / \varepsilon_{s1} = -3,5/6,5\text{‰}$ ,  $\mu_{Rds,lim} = 0,206$  i  $\zeta_{lim} = 0,854$ .

Uz pretpostavljeni mehanički koeficijent armiranja  $\omega$  i pretpostavljenu bezdimenzijsku uzdužnu tlačnu silu  $v_{Sd}$ , prema postupku koji slijedi određuje se bezdimenzijski moment savijanja  $\mu_{Sd}$ .

Prvo se pretpostavlja kakvoća armature s odgovarajućom proračunskom granicom popuštanja čelika  $f_{yd}$ .

Zatim se iz slike 2. odredi  $M_{Sds}$ , tj. ukupni proračunski moment savijanja s obzirom na težište vlačne armature

$$M_{Sds} = M_{Sd} + N_{Sd} \cdot z_s, \quad (12)$$

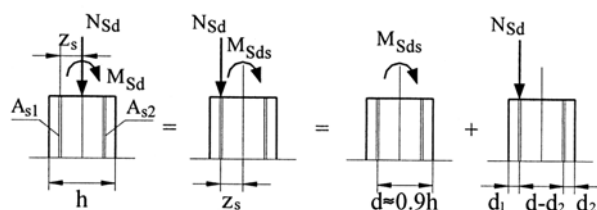
Vlačna armatura presjeka stupa određuje se izrazom:

$$A_{s1} = \frac{M_{Sds}}{(\zeta \cdot d) f_{yd}} - \frac{N_{Sd}}{f_{yd}} = \frac{M_{Sd} + N_{Sd} \cdot z_s}{(\zeta \cdot d) f_{yd}} - \frac{N_{Sd}}{f_{yd}}, \quad (13)$$

gdje je  $\zeta$  koeficijent kraka unutrašnjih sila koji odgovara proračunskom momentu  $M_{Sds}$ . Ovaj se koeficijent kreće između 0,811 i 0,998 i ovisi o relativnim deformacijama  $\varepsilon_{c2}$  i  $\varepsilon_{s1}$  prema izrazu (10). Izraz (13) može se pisati u nešto izmijenjenom obliku kao:

$$A_{s1} = \frac{M_{Sd}}{(\zeta \cdot d) f_{yd}} + \frac{N_{Sd}}{f_{yd}} \left( \frac{z_s}{(\zeta \cdot d)} - 1 \right). \quad (14)$$

Proračunana armatura postavlja se, zbog simetričnog armiranja stupa, u vlačno a ista takva i u tlačno područje presjeka. Naravno da je tada u presjeku stupa dvostruko više uzdužne armature od potrebne. Pri tome valja poštivati uvjete da je ukupna armatura veća od minimalne i manja od maksimalno dopuštene armature stupa.



Slika 2. Ukupni proračunski moment savijanja  $M_{Sds}$  manji je ili jednak najvećem momentu savijanja za jednostruko armirani presjek,  $M_{Rds,lim}$

Mehanički koeficijenti armiranja vlačne ( $\omega_1$ ) i tlačne armature ( $\omega_2$ ) dani su izrazima (15):

$$\omega_1 = \frac{A_{s1}}{b \cdot d} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}}, \quad \omega_2 = \frac{A_{s2}}{b \cdot d} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}}. \quad (15)$$

Bezdimenzijska veličina uzdužne sile  $v_{Sd}$  mora biti manja ili jednaka bezdimenzijskoj uzdužnoj sili nosivosti presjeka,  $v_{Rd}$ :

$$v_{Sd} = \frac{N_{Sd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \leq 0,85 \alpha_v \cdot \zeta + \omega_2 \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} - \omega_1 \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} = \mu_{Rd} \quad (16)$$

$$v_{Rd} = \frac{N_{Rd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}},$$

a bezdimenzijska veličina momenta savijanja  $\mu_{Sd}$  mora biti manja ili jednaka od bezdimenzijske veličine momenta nosivosti na savijanje  $\mu_{Rd}$ :

$$\mu_{Sd} = \frac{M_{Sd}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} \leq 0,85 \alpha_v \cdot \left( \frac{h}{d} 0,5 - k_a \xi \right) + \omega_2 \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} \left( \frac{h}{d} 0,5 - \frac{d_2}{d} \right) - \omega_1 \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} \left( \frac{h}{d} 0,5 - \frac{d_1}{d} \right) = \mu_{Rd}. \quad (17)$$

Izraz (14) uvrsti se u (15) i dobije se:

$$\omega_1 = \left[ \frac{M_{Sd}}{(\zeta \cdot d) f_{yd}} + \frac{N_{Sd}}{f_{yd}} \left( \frac{z_s}{(\zeta \cdot d)} - 1 \right) \right] \cdot \frac{f_{yd}}{b d \cdot f_{cd}} = \frac{M_{Sd}}{b d^2 \cdot f_{cd}} \cdot \frac{1}{\zeta} + \frac{N_{Sd}}{b d \cdot f_{cd}} \left( \frac{z_s}{\zeta \cdot d} - 1 \right), \quad (18)$$

odnosno:

$$\omega_1 = \mu_{Sd} \cdot \frac{1}{\zeta} + v_{Sd} \left( \frac{z_s}{\zeta \cdot d} - 1 \right). \quad (19)$$

Za odnose dimenzija  $d_1 = 0,1h$ ,  $z_s \approx 0,44d$ ,  $d = 0,9h$ , vrijedi:

$$\omega_1 = \mu_{Sd} \cdot \frac{1}{\zeta} + v_{Sd} \left( \frac{0,44}{\zeta} - 1 \right). \quad (20)$$

Za savijanje bez uzdužne sile ( $v_{Sd} = 0$ ) izlazi iz izraza (20):  $\omega_1 = \mu_{Sd} / \zeta$ .

Iz izraza (20) izluči se bezdimenzijska veličina momenta savijanja koja glasi:

$$\mu_{Sd} = \omega_1 \cdot \zeta + \nu_{Sd} (\zeta - 0,44). \quad (21)$$

U slučaju simetrične armature,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , posljednji izraz služi za konstruiranje jednog dijela interakcijskog dijagrama.

2.1.2 Računski moment savijanja veći je od najvećeg momenta savijanja za jednostruko armiran presjek,  $M_{Sds} > M_{Rds,lim}$

U slučaju kada je ukupni računski moment savijanja veći od najvećeg momenta savijanja za jednostruko armirani presjek provodi se ovaj postupak.

Uz pretpostavljeni mehanički koeficijent armiranja  $\omega$  i pretpostavljenu bezdimenzijsku uzdužnu tlačnu silu  $\nu_{Sd}$  određuje se bezdimenzijski moment savijanja  $\mu_{Sd}$ . Pretpostavljena je kakvoća armature s odgovarajućom računskom granicom popuštanja čelika  $f_{yd}$ .

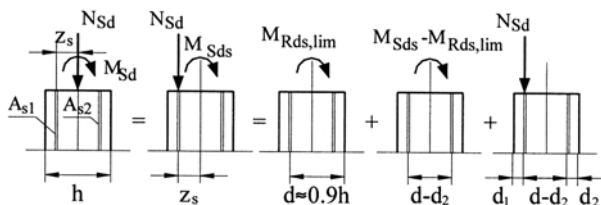
Vlačna armatura (slika 3.) određuje se prema izrazu:

$$A_{s1} = \frac{M_{Rds,lim}}{(\zeta_{lim} \cdot d) f_{yd}} + \frac{M_{Sds} - M_{Rds,lim}}{(d - d_2) f_{yd}} - \frac{N_{Sd}}{f_{yd}}, \quad (22)$$

Kada se izraz (12) uvrsti u (22) dobije se:

$$A_{s1} = \frac{M_{Rds,lim}}{(\zeta_{lim} \cdot d) f_{yd}} + \frac{M_{Sd} + N_{Sd} \cdot z_s - M_{Rds,lim}}{(d - d_2) f_{yd}} - \frac{N_{Sd}}{f_{yd}}. \quad (23)$$

Prema izrazima (22) i (23) može se pri velikoj računskoj tlačnoj sili,  $N_{Sd}$  dogoditi da vlačna armatura bude manja od minimalne ili čak "negativna", tj manja od nule. To je slučaj kada je cijeli presjek tlačno naprežan, tj. neutralna os nalazi se izvan presjeka. U takvim slučajevima inženjeri u praksi usvajaju minimalnu armaturu ne vodeći računa o potrebnoj tlačnoj armaturi. Tako odabrana armatura ne mora uvijek biti dostatna.



Slika 3. Ukupni računski moment savijanja  $M_{Sds}$  veći je od najvećeg momenta savijanja za jednostruko armirani presjek,  $M_{Rds,lim}$

$\zeta_{lim}$  je koeficijent kraka unutrašnjih sila koji odgovara računskom momentu nosivosti jednostruko armiranog presjeka,  $M_{Rds,lim}$ .

Mehanički koeficijent armiranja dan je izrazom (15) u koji se uvrsti izraz (23) te se uz  $d-d_2 \approx 0,89d$  dobije:

$$\omega_1 = \frac{M_{Rds,lim}}{bd^2 \cdot f_{cd}} \cdot \frac{1}{\zeta_{lim}} + \frac{M_{Sd}}{bd^2 \cdot f_{cd}} \cdot \frac{1}{0,89} - \frac{M_{Rds,lim}}{bd^2 \cdot f_{cd}} \cdot \frac{1}{0,89} + \frac{N_{Sd} \cdot z_s}{bd^2 f_{cd}} \cdot \frac{1}{0,89} - \frac{N_{Sd}}{bdf_{cd}}, \quad (24)$$

odnosno:

$$\omega_1 = \mu_{Rds,lim} \left( \frac{1}{\zeta_{lim}} - \frac{1}{0,89} \right) + \mu_{Sd} \cdot \frac{1}{0,89} + \nu_{Sd} \left( \frac{z_s}{0,89 \cdot d} - 1 \right), \quad (25)$$

$$\mu_{Rds,lim} = \frac{M_{Rds,lim}}{bd^2 f_{cd}}. \quad (26)$$

Za  $z_s = (h/2) - d_1 = (0,55 - 0,11) d \approx 0,44d$ , iz izraza (25) izluči se bezdimenzijska veličina momenta savijanja:

$$\mu_{Sd} = 0,89\omega_1 + \mu_{Rds,lim} \left( 1 - \frac{0,89}{\zeta_{lim}} \right) + \nu_{Sd} \left( 0,89 - \frac{z_s}{d} \right) = 0,89\omega_1 - 0,0974\mu_{Rds,lim} + 0,45\nu_{Sd}. \quad (27)$$

Tlačna armatura određuje se izrazom:

$$A_{s2} = \frac{M_{Sd} + N_{Sd} \cdot z_s - M_{Rds,lim}}{(d - d_2) f_{yd}}, \quad (28)$$

pa je odgovarajući koeficijent armiranja:

$$\omega_2 = \mu_{Sd} \frac{1}{0,89} + \nu_{Sd} \frac{z_s}{0,89d} - \mu_{Rds,lim} \frac{1}{0,89}, \quad (29)$$

a bezdimenzijski moment savijanja:

$$\mu_{Sd} = 0,89\omega_2 + \mu_{Rds,lim} - \nu_{Sd} \frac{z_s}{d}. \quad (30)$$

Između dvije armature,  $A_{s1}$  i  $A_{s2}$ , usvaja se veća, tj. usvaja se veći koeficijent armiranja od dva,  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , a presjek se armira simetričnom armaturom  $A_{s1} = A_{s2}$ , tj.  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Time se u presjek uvodi veća armatura od, za granično stanje nosivosti, potrebne. Kada je  $M_{Sds} = M_{Rds,lim}$  vrijedi:

$$M_{Sd} = M_{Rds,lim} - N_{Sd} \cdot z_s. \quad (31)$$

Ako se izraz (31) podijeli s ( $bd^2 f_{cd}$ ) dobiva se izraz:

$$\mu_{Sd} = \mu_{Rds,lim} - \nu_{Sd} \frac{z_s}{d}. \quad (32)$$

2.1.3 Određivanje pravaca dijagrama interakcije

S pomoću navedenih izraza nacrtaju se na slici 4. pravci I do IV nosivosti presjeka naprezanih uzdužnom tlačnom silom i momentom savijanja za jedan određeni koeficijent simetričnog armiranja, npr.  $\omega = 0,2$ . Pravci I do IV prikazuju nosivost (otpornost) presjeka a dobiju se s pomoću izraza (21), (27), (30) i (32), tako da se izjednače veličine  $\mu_{Sd}$  sa  $\mu_{Rd}$  te  $v_{Sd}$  sa  $v_{Rd}$  iz izraza (16) i (17).

Izrazi (21), (27), (30) i (32) daju četiri grane dijagrama interakcije prema Ehlersu .

Izraz (21) vrijedi za  $\mu_{Sd} \leq \mu_{Rd,lim} - v_{Sd} \frac{z_s}{d}$ , a prikazan je pravcem I na slici 4.

Izraz (27) prikazan je pravcem II na slici 4. i vrijedi kada je  $\mu_{Sd} > \mu_{Rd,lim} - v_{Sd} \frac{z_s}{d}$ , i to od križanja s pravcem I do križanja s pravcem III dobivenim na osnovi izraza (30),

Izraz (30) prikazan je pravcem III na slici 4. i vrijedi kada je  $\mu_{Sd} > \mu_{Rd,lim} - v_{Sd} \frac{z_s}{d}$  i to od križanja s prav-

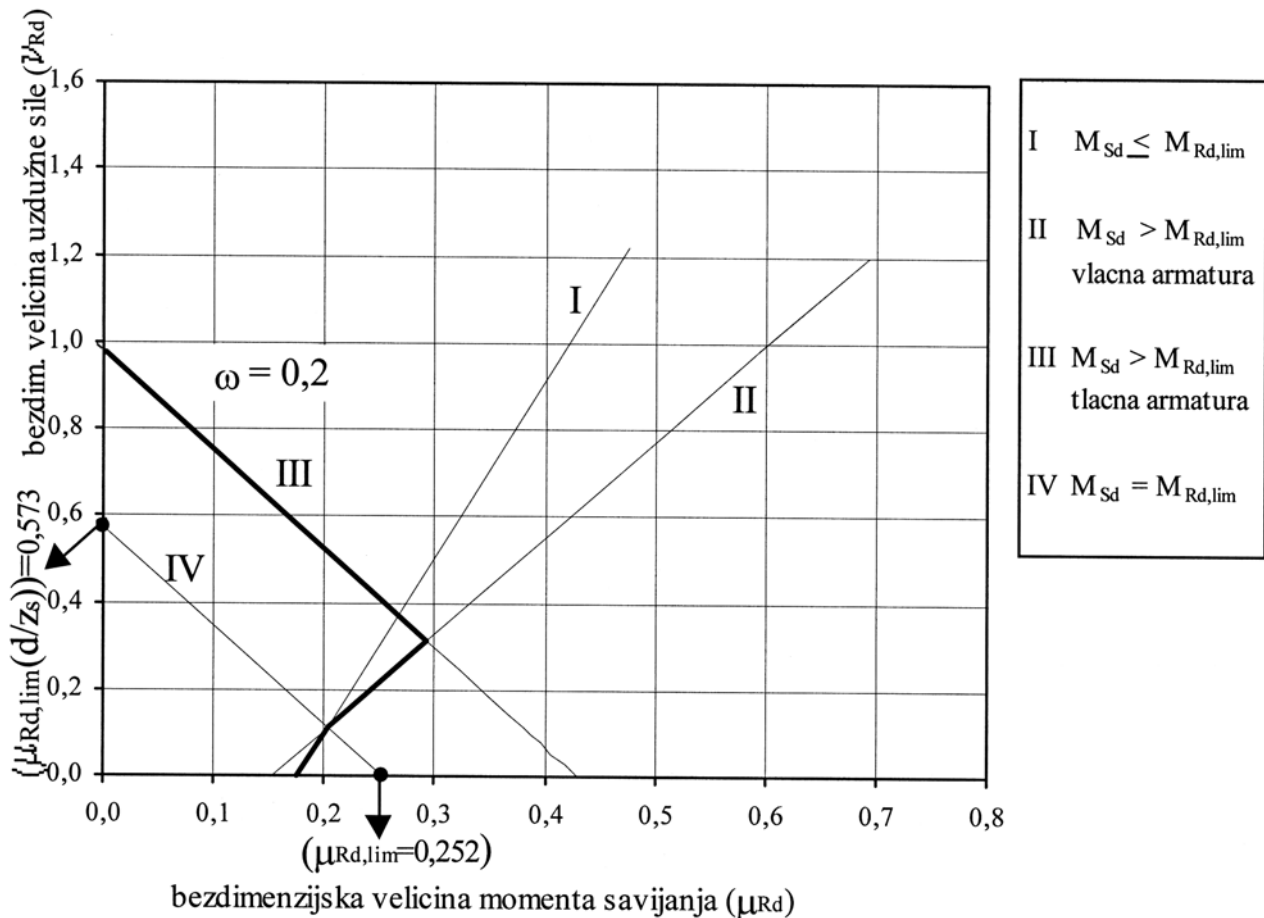
cem II dobivenim na osnovi izraza (27). Izraz (32) prikazan je pravcem IV i predstavlja granicu kada je  $M_{Sds} = M_{Rds,lim}$ .

Postupak se potom provodi za različite mehaničke koeficijente armiranja  $\omega$  od 0,05 do 1,0. Interakcijski dijagrami dobiveni postupkom Ehlersa dani su na slici 5. S pomoću ovih dijagrama može se odrediti armatura rabeći izraz (16) za bezdimenzijsku veličinu uzdužne sile  $v_{Sd}$  i izraz (17) za bezdimenzijsku veličinu momenta savijanja  $\mu_{Sd}$ . Na dijagramu na slici 5. očita se mehanički koeficijent armiranja  $\omega$  te ga se uvrsti u izraz (33) da se izračuna armatura simetrično armiranog presjeka stupa:

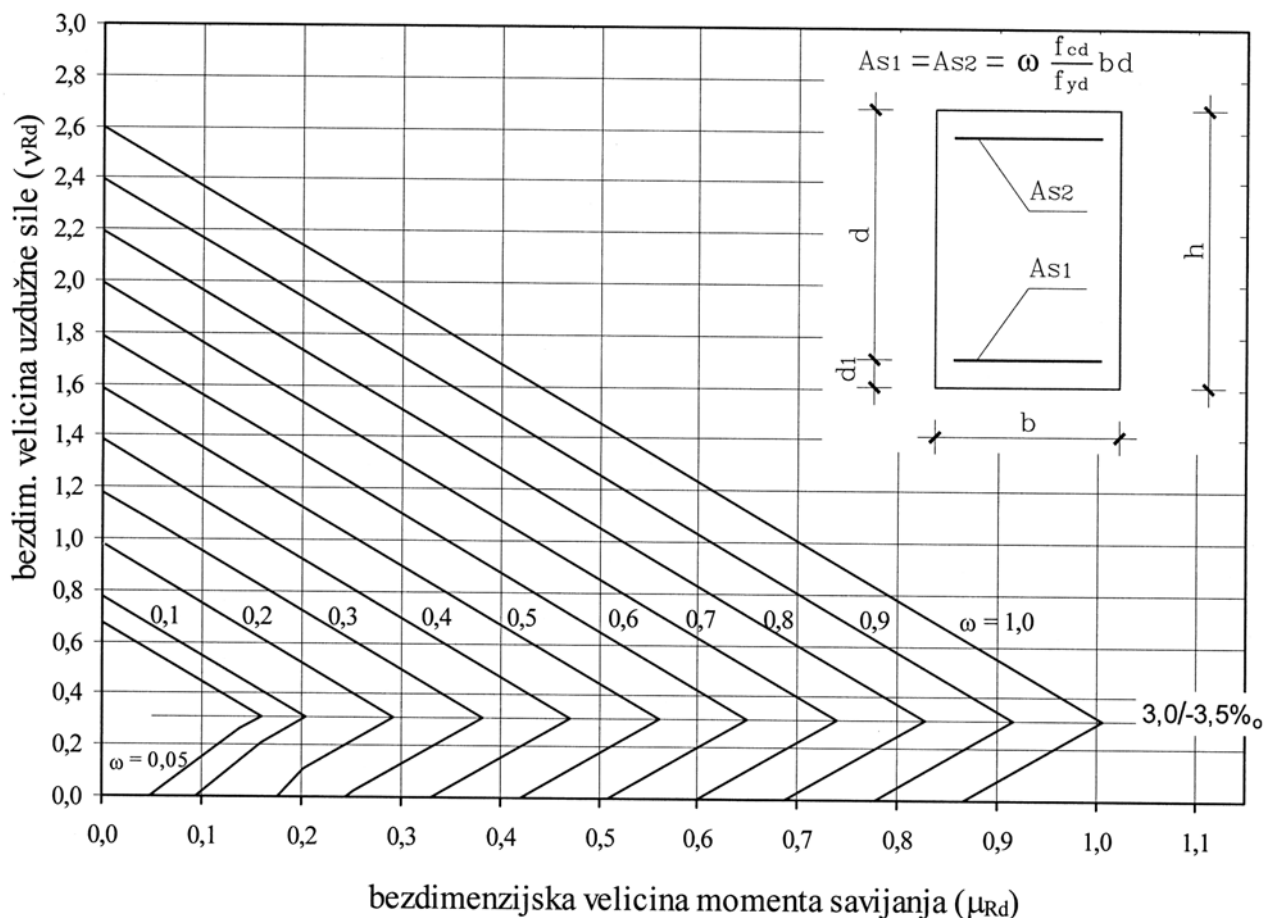
$$A_{s1} = A_{s2} = \omega \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}} bd. \tag{33}$$

Naravno da ukupna uzdužna armatura presjeka stupa mora biti između minimalno i maksimalno dopuštene.

Ovakav dijagram interakcije se ne preporučuje za praksu u cijelom svojem području, nego samo u jednom dijelu. On je konstruiran samo zato da bi se vizualno prikazala njegova uporabljivost za koju se ne može dobiti osjećaj proračunom.



Slika 4. Dijagram interakcije s pomoću postupka po Ehlersu prema EC 2 za mehanički koeficijent armiranja  $\omega = 0,2$

Slika 5. Dijagrami interakcije po EC2 prema postupku Ehlersa za  $A_{s1}=A_{s2}$  i RA 400/500

## 2.2 Postupak određivanja "klasičnih" dijagrama interakcije

Da bi se dijagrami interakcije mogli razlikovati, jedan dijagram je nazvan po Ehlersu a drugi, čije se izvedenice nalaze u literaturi, nazvan je tzv. "klasični".

Proračun armiranobetonskih stupova, s pomoću dijagrama interakcije, poznat je postupak koji se temelji na pretpostavkama linearne raspodjele deformacija po visini presjeka te ravnoteže unutarnjih i vanjskih sila.

Pretpostave se kakvoća betona i armature te smještaj simetrične armature u betonskom presjeku stupa.

Za različite odnose relativnih deformacija armature  $\varepsilon_s$  i betona  $\varepsilon_c$  variraju se mehanički koeficijenti armiranja od 0,05 do 1,00 i traže se bezdimenzijske veličine uzdužne sile  $v_{Sd}$  i momenta savijanja  $\mu_{Sd}$  koji će izazvati takve relativne deformacije pojedinog materijala.

Prema slici 1., moment kojim se presjek suprotstavlja savijanju glasi:

$$M_{Rd} = 0,85 f_{cd} \cdot \alpha_v \cdot \xi \cdot d \cdot b \left( \frac{h}{2} - k_a \cdot x \right) + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) + A_{s1} \cdot \sigma_{s1} \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) \quad (34)$$

Nosivost presjeka na uzdužnu tlačnu silu jest:

$$N_{Rd} = 0,85 f_{cd} \cdot \alpha_v \cdot \xi \cdot d \cdot b + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} - A_{s1} \cdot \sigma_{s1} \quad (35)$$

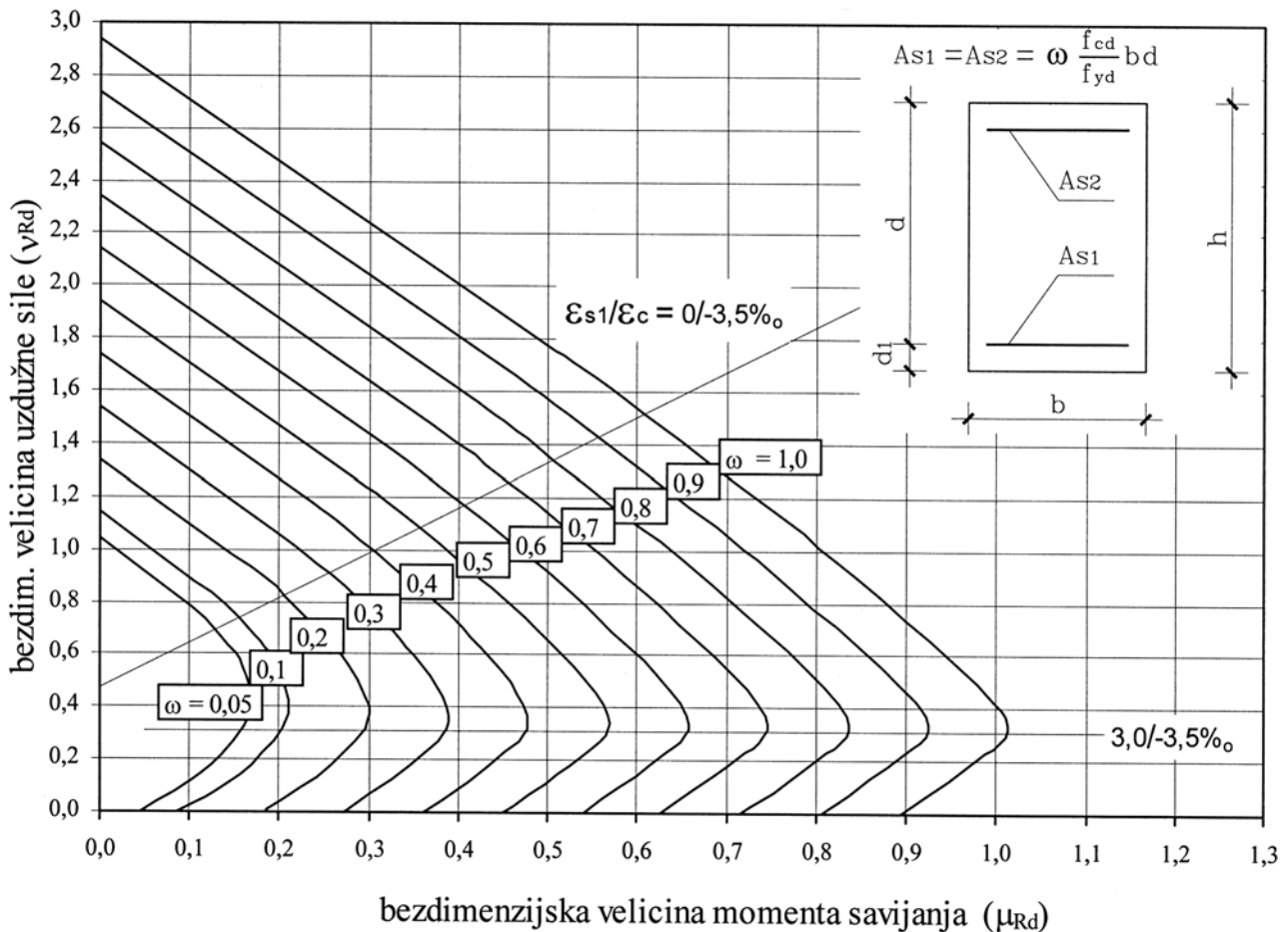
Računska uzdužna sila i računski moment savijanja moraju zadovoljavati uvjete:

$$N_{Sd} \leq N_{Rd} \quad (36)$$

$$M_{Sd} \leq M_{Rd}$$

Bezdimenzijska veličina uzdužne sile  $v_{Sd}$  mora biti manja ili jednaka bezdimenzijskoj uzdužnoj sili nosivosti  $v_{Rd}$ . Izraz (16), uz  $\omega = \omega_1 = \omega_2$  (za simetrično armiranje) daje se prikazati kao:

$$v_{Rd} = \frac{N_{Rd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} = 0,85 \alpha_v \cdot \xi + \omega \left( \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} - \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} \right) \quad (37)$$



Slika 6. "Klasični" dijagrami interakcije po EC2 za simetričnu armaturu  $A_{s1} = A_{s2}$  i RA 400/500

Bezdimenzijska veličina momenta savijanja  $\mu_{sd}$  mora biti manja ili jednaka bezdimenzijskoj veličini momenta nosivosti na savijanje  $\mu_{Rd}$ . Izraz (17), uz  $\omega = \omega_1 = \omega_2$  (za simetrično armiranje) te uz  $d_1 = d_2$  daje se prikazati kao:

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Rd}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = 0,85\alpha_v \cdot \xi \left( \frac{h}{d} 0,5 - k_a \xi \right) + \omega \left( \frac{h}{d} 0,5 - \frac{d_1}{d} \right) \left[ \frac{\sigma_{s2}}{f_{yd}} + \frac{\sigma_{s1}}{f_{yd}} \right] \quad (38)$$

Na slici 6. prikazani su dijagrami interakcije za simetričnu armaturu. Dijagrami odgovaraju nosivosti presjeka za određenu armaturu, tj. veličini mehaničkog koeficijenta armiranja  $\omega$ .

### 2.3 Ograničenja primjene dijagrama interakcije

Za proračun stupova pravokutnog poprečnog presjeka potrebno je u dijagramima interakcije utvrditi određena ograničenja primjene.

Prvo se ograničenje odnosi na potrebnu duktilnost presjeka. Prema EC8 [13] za različite razrede duktilnosti ( $L$  = niska duktilnost,  $M$  = srednja,  $H$  = visoka duktilnost) dopuštaju se sljedeće najveće računске tlačne uzdužne sile u stupu:

- za razred L duktilnosti -  $N_{sd} \leq 0,75 b \cdot h \cdot f_{cd}$
- za razred M duktilnosti -  $N_{sd} \leq 0,65 b \cdot h \cdot f_{cd}$
- za razred H duktilnosti -  $N_{sd} \leq 0,55 b \cdot h \cdot f_{cd}$

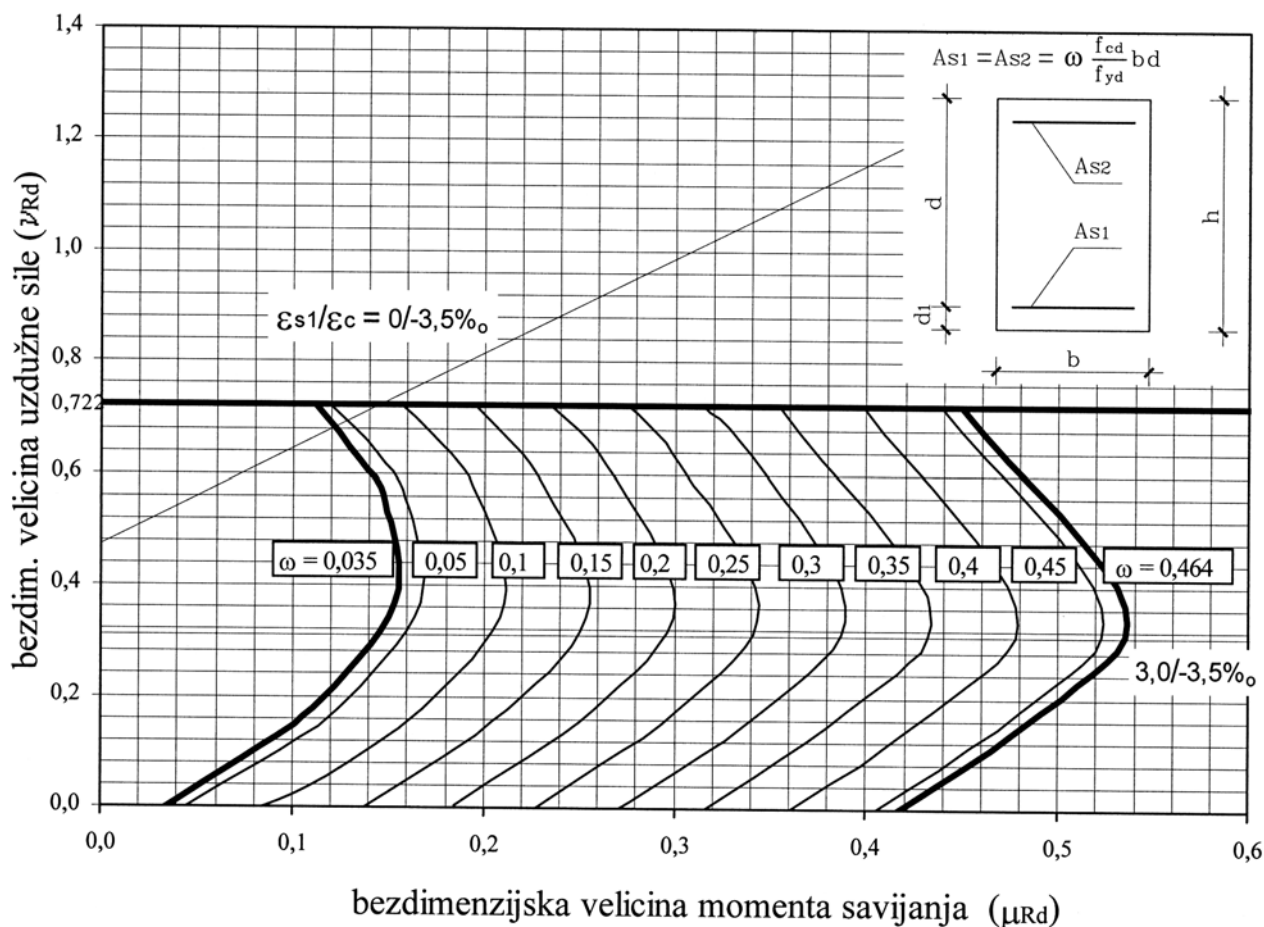
To znači da za odnose dimenzija  $d = 0,9 h$ , bezdimenzijska vrijednost uzdužne sile prema izrazu (16) iznosi:

- za razred L duktilnosti -  $\nu_{sd} \leq 0,833$
- za razred M duktilnosti -  $\nu_{sd} \leq 0,722$
- za razred H duktilnosti -  $\nu_{sd} \leq 0,611$

Drugo je ograničenje minimalna dopuštena površina armature koja za stupove iznosi:

$$A_{s,min} = 0,003 bh, \text{ što za simetričnu armaturu: } A_{s1,min} = A_{s2,min} = 0,0015 bh.$$





Slika 7. Dijagrami interakcije s ograničenjima uzdužne sile za razred duktilnosti "M" prema EC2, te minimalne i maksimalne armature za beton C25/30 i armaturu RA 400/500 prema EC2

Tada je minimalna vrijednost mehaničkog koeficijenta armiranja:

$$\omega_{\min} = \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \cdot \frac{1}{b \cdot 0,9h} \cdot A_{s1, \min} \quad (39)$$

Za armaturu kvalitete RA 400/500  $f_{yd}=347,8 \text{ N/mm}^2$ , ovisno o razredu betona bit će:

- C25/30,  $f_{cd}=16,67 \text{ N/mm}^2$ ,  $\omega_{\min} = 0,035$
- C30/37,  $f_{cd}=20,00 \text{ N/mm}^2$ ,  $\omega_{\min} = 0,029$
- C35/45,  $f_{cd}=23,33 \text{ N/mm}^2$ ,  $\omega_{\min} = 0,025$
- C40/50,  $f_{cd}=26,67 \text{ N/mm}^2$ ,  $\omega_{\min} = 0,022$ .

Treće je ograničenje maksimalna dopuštena površina armature koja za stupove prema EC2 [10] iznosi:

$$A_{s, \max} = 0,040 bh, \text{ odnosno } A_{s1, \max} = A_{s2, \max} = 0,020 bh.$$

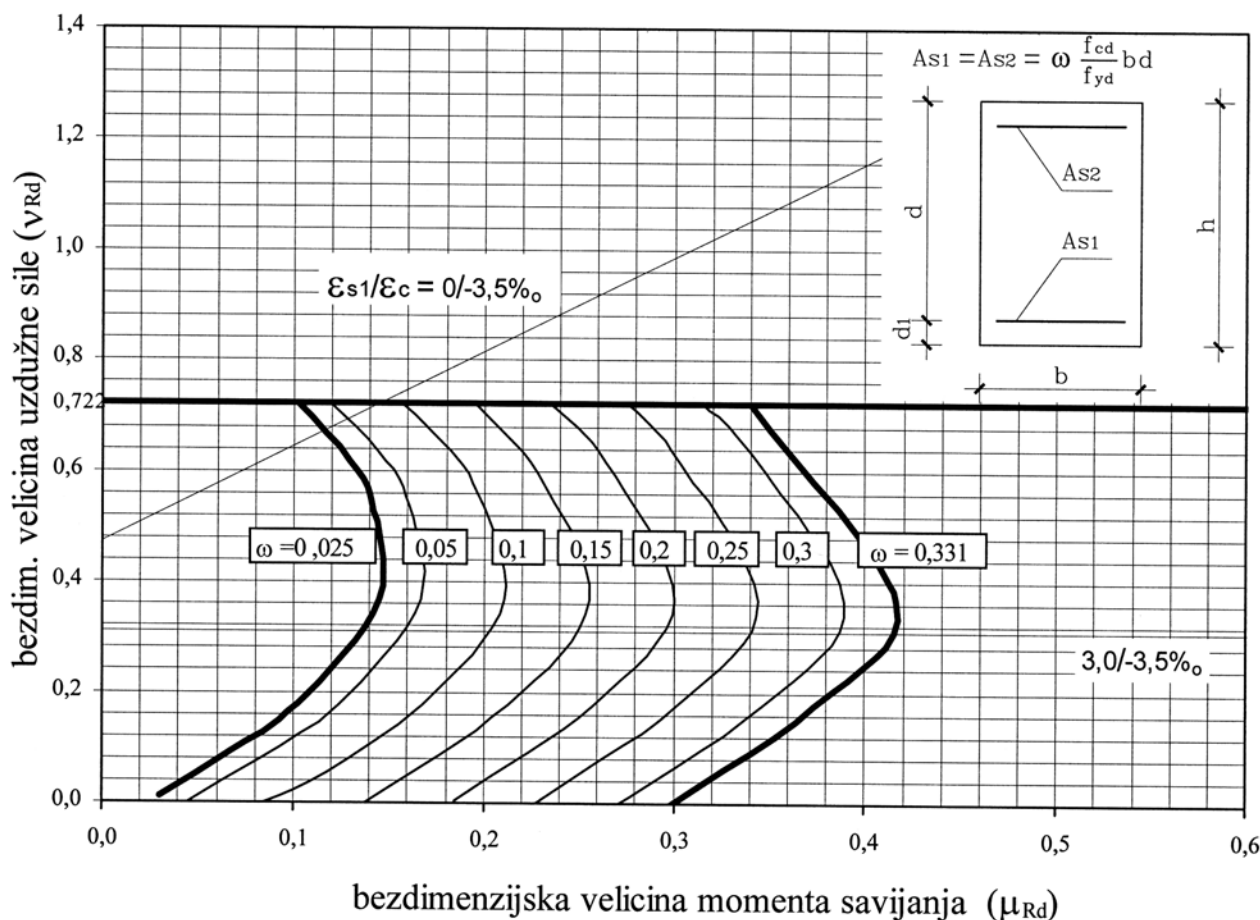
Tada je najveća vrijednost mehaničkog koeficijenta armiranja:

$$\omega_{\max} = \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \cdot \frac{1}{b \cdot 0,9h} \cdot A_{s1, \max} \quad (40)$$

Za armaturu kvalitete RA 400/500, tj.  $f_{yd}=347,8 \text{ N/mm}^2$ , ovisno o razredu betona bit će:

- C25/30  $\omega_{\max} = 0,464$
- C30/37  $\omega_{\max} = 0,386$
- C35/45  $\omega_{\max} = 0,331$
- C40/50  $\omega_{\max} = 0,290$ .

Na sljedećim slikama prikazani su dijagrami interakcije s ograničenjima uzdužne tlačne sile za srednji razred duktilnosti (M) te minimalne i maksimalne armature za razrede betona C25/30 i C35/45 i za armaturu RA 400/500.



Slika 8. Dijagrami interakcije s ograničenjima uzdužne sile za razred duktilnosti "M" prema EC8, te minimalne i maksimalne armature za beton C35/45 i armaturu RA 400/500 prema EC2

#### 2.4 Usporedba "klasičnih" dijagrama interakcije i dijagrama interakcije prema Ehlersu

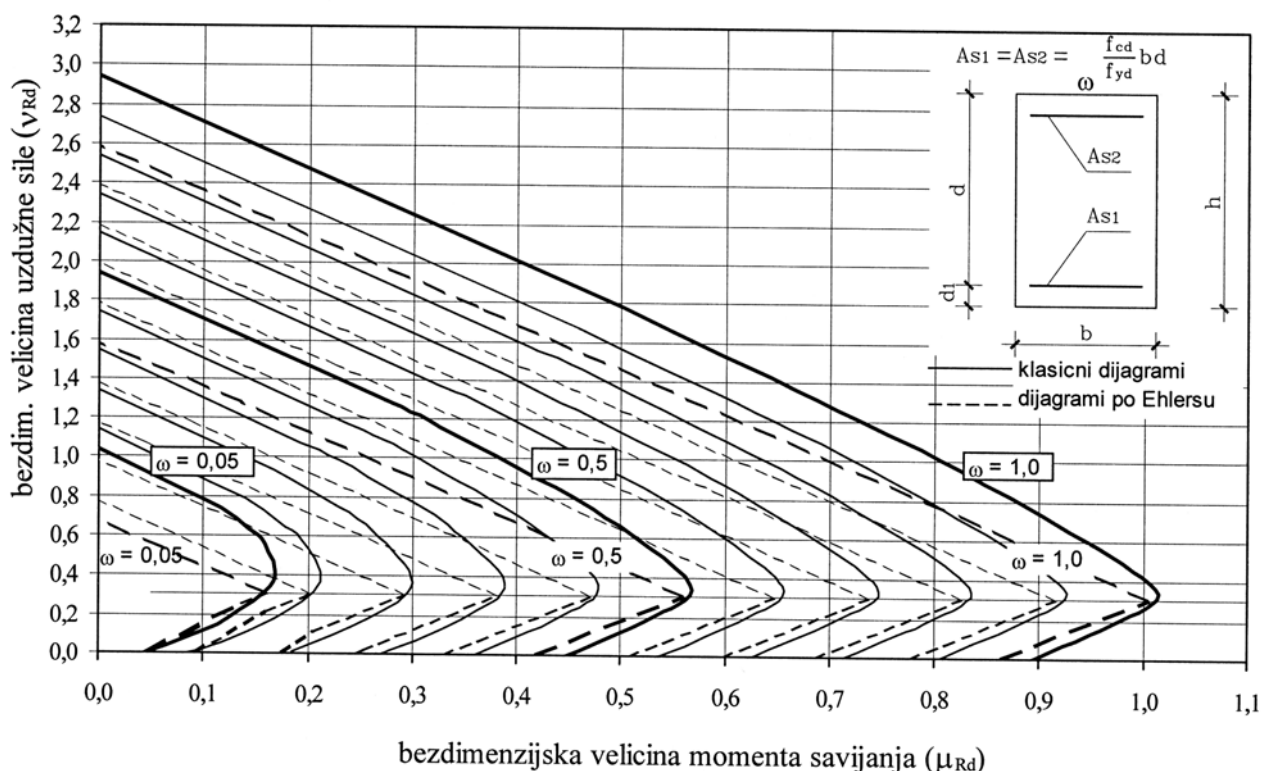
Prethodnim se izrazima i dijagramima interakcije, za različite vrijednosti mehaničkih koeficijenata armiranja  $\omega$ , dobivaju pripadni momenti savijanja i uzdužne sile ili njihove bezdimenzijske veličine, odnosno za poznate momente savijanja i uzdužne sile može se odrediti armatura u presjeku. Ovi dijagrami dani su postupkom prema Ehlersu i tzv. "klasičnim" postupkom. Da bi se ustanovilo odstupanje postupka prema Ehlersu od točnijeg "klasičnog" postupka, ove dijagrame valja usporediti.

U istom koordinatnom sustavu na slici 9. prikazuju se oba dijagrama interakcije kako bi se odmah uočilo odstupanje dviju metoda kao i područje u kojem će obje metode davati slične rezultate. Vidljivo je da se dijagrami dobro podudaraju pri malim vrijednostima uzdužne tlačne sile, a ne podudaraju se pri velikim vrijednostima.

### 3 Zaključak

Na temelju usporedbe dijagrama interakcije dobivenih dvjema poznatim metodama proračuna na ekscentrični tlak (tzv. "klasični" dijagrami interakcije i postupak prema Ehlersu) zaključuje se sljedeće:

- najveće podudaranje ovih dviju metoda događa se kod malih veličina uzdužne tlačne sile i to područje može se za EC2 odrediti kao  $0 \leq v_{Sd} \leq 0,3$
- pri većoj uzdužnoj sili, nagibi dijagrama za iste mehaničke koeficijente armiranja približno su jednaki tako da su krakovi dijagrama gotovo paralelni. Međutim, dijagrami dobiveni metodom prema Ehlersu pomaknuti su prema ishodištu tako da se prema toj metodi dobiva znatno veća potrebna površina armature
- iz dijagrama sa slike 9. također se može zaključiti da su razlike između ovih dviju metoda, kada je  $v_{Sd} > 0,3$ , to veće što je manji moment savijanja, a razlike se smanjuju s povećanjem momenta



Slika 9. "Preklopljeni" interakcijski dijagrami, tzv. "klasični" i "prema Ehlersu" za proračun armature u stupovima prema EC2

- postupak prema Ehlersu daje neracionalno veliku armaturu u području većih uzdužnih tlačnih sila
- radi zadovoljenja uvjeta duktilnosti iz EC8 [13] te uvjeta minimalne i maksimalne armature prema EC2 [10] primjenu interakcijskih dijagrama treba ograničiti na dopušteno područje (slike 7. i 8.)
- valja biti oprezan s tzv. "negativnom" vlačnom armaturom koja se postupkom Ehlersa dobije za veće vrijednosti tlačne uzdužne sile jer u takvim slučajevima može biti mjerodavna tlačna ili minimalna armatura, a odabire se veća od tih dviju
- treba naglasiti da dijagrami interakcije koji se temelje na postupku Ehlersa nisu konstruirani kako bi se rabili u praksi, nego zato da se upozori na netočnost tog postupka pri povećanim uzdužnim silama, a što se zorno vidi usporedbom sa tzv. "klasičnim" (točnijim) dijagramima interakcije
- preporučuje se uporaba tzv. "klasičnih" dijagrama interakcije koji su dani na slikama 7 i 8.

### Zahvala

Ovaj rad napravljen je u okviru znanstvenog projekta br. 082001, "Granična stanja uporabljivosti armiranobetonskih konstrukcija" koji podupire Ministarstvo znanosti i tehnologije Republike Hrvatske. Autori se zahvaljuju Ministarstvu na potpori.

### LITERATURA

- [1] Werner, O.: *Dimenzioniranje pravougaonih armiranobetonskih preseka*, Izdavačko poduzeće ministarstva građevina FNJR, Beograd, 1948.
- [2] Širola, B.: *Priručnik za armirani beton*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1961., 439.-525.
- [3] Juranović V.: *Beton i armirani beton*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1966., 151.-185.
- [4] Rüşch, H.: *Stahlbeton – Spannbeton*, Band 1, Werkstoffeigenschaften, Bemessungsverfahren, Werner – Verlag GmbH – Düsseldorf, 13. Bemessung von Querschnitten mit rechteckiger Druckzone für einachsige Biegung und Normalkraft, 1972., 119. – 149.
- [5] Ouvrier, E.: *Stahlbetonsäulen*, Werner-Verlag, Düsseldorf, 1975.

- [6] Dvornik, J.: *Pravokutni ekscentrično pritisnuti armirano-betonski presjek*, Priručnik za dimenzioniranje, Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Institut Građevinarstva Hrvatske, Zagreb, 1975.
- [7] Grasser, E.: *Bemessung für Biegung mit Längskraft*, Schub und Torsion. Beton-Kalender 1977., 680.-719.
- [8] *Pravilnik o tehničkim normativima za izgradnju objekata visokogradnje u seizmičkim područjima*, Službeni list SFRJ br.31, 1981., čl. 61.
- [9] CRSI, Concrete Reinforcing Steel Institute Handbook. CRSI, Illinois, USA, (1982), pp. 2-1 to 2.-10.
- [10] ENV1992-1-1– Design of Concrete Structures; Part 1: General Rules and Rules for Buildings, Eurocode 2, European Committee for Standardization, Bruxelles (1991)
- [11] Grasser, E., Feix, J.: *Bemessung für Biegung mit Längskraft*, (EC2 Abschnitt 4.3.1). Bemessungshilfsmittel zu Eurocode 2, Teil 1, Beuth Verlag GmbH, Berlin 1992., 47.-73.
- [12] Tomičić I.: *Priručnik za proračun armiranobetonskih konstrukcija*, DHGK, Zagreb, 1993., 395.-412.
- [13] ENV1998-1-3– Design Provisions for Earthquake Resistance of Structures; Part 1-3: General rules – Specific rules for various materials and elements, Eurocode 8, European Committee for Standardization, Bruxeless (1995)
- [14] Tomičić I.: *Betonske konstrukcije*, Odabrana poglavlja, Zagreb, 1996.
- [15] Tomičić I.: *Betonske konstrukcije*, DHGK, Zagreb, 1996., 185. – 209.
- [16] Nawy, E. G.: *Reinforced Concrete*, A fundamental approach, Prentice Hall, New Jersey 1996., Chapter 9, Combined compression and bending. pp. 327.-412.
- [17] Dodge M.; Kinata C.; Stinson C.: *Kako koristiti Microsoft Excel 97*, ZNAK, Zagreb, 1997.
- [18] Mandić A., Sorić Z.: *Dijagrami interakcije kratkih armiranobetonskih stupova*, Cavtat, Sabor hrvatskih graditelja 2000, 6. – 8. travanj 2000., 405.-417.