

Dinamički problemi pri slučajnoj pobudi

Dea Diklić, Dejan Diklić

Ključne riječi

slučajne vibracije, bijeli šum, spektralne gustoće snage odziva, stohastički modeli gibanja tla

Key words

accidental vibration, white noise, spectral densities of response level, stochastic soil motion models,

Mots clés

vibrations aléatoires, bruit blanc, densités spectrales de puissance de la réponse, modèles stochastiques de mouvement du sol

Ключевые слова

случайные вибрации, белый шум, спектральные плотности силы ответа, стохастические модели колебания грунтов,

Schlüsselworte:

zufällige Schwingungen, weisses Geräusch, Spektraldichten der Anregungskraft, stochastisches Modell der Bodenbewegung

D. Diklić, D. Diklić

Izvorni znanstveni rad

Dinamički problemi pri slučajnoj pobudi

U radu su prikazana istraživanja utjecaja potresnog gibanja na građevine. Ta su istraživanja ukazala na stupanj važnosti međukorelacije između modalnih oblika na spektralne gustoće snage odziva i na srednju kvadratnu vrijednost odziva konstrukcije. Pokazano je da su ta istraživanja put prema pojednostavljenju proračuna u odnosu na vrlo složene proračune koji bi se trebali provoditi da bi se dobio odziv konstrukcije izložene slučajnoj potresnoj pobudi, simuliranom bijelim šumom.

D. Diklić, D. Diklić

Original scientific paper

Dynamic problems at accidental excitation

The analysis of influence exerted on structures by seismic motion is presented in the paper. The analysis has pointed to the level of significance of correlations among modal forms, spectral density of response level, and the mean square value of structural response. It is demonstrated that this analysis is the way towards simplification of complex calculations that must currently be made to obtain response of a structure exposed to accidental seismic excitation, simulated by white noise.

D. Diklić, D. Diklić

Ouvrage scientifique original

Problèmes dynamiques lors d'une excitation stochastique

L'article présente les études de l'influence des mouvements sismiques sur les bâtiments. Ces études ont révélé de l'intercorrélation entre les formes modales sur les densités spectrales de puissance de la réponse et sur la valeur quadratique moyenne de la réponse de la construction. Il est démontré que ces études devraient permettre une simplification du calcul par rapport aux calculs très complexes nécessaires pour obtenir la réponse d'une construction exposée à une excitation sismique aléatoire, simulée par le bruit blanc.

Д. Диклич, Д. Диклич

Оригинальная научная работа

Динамические проблемы при случайном возбужении

В работе показаны исследования влияния колебаний, вызванных землетрясением, на строительные сооружения. Те исследования указали на степень важности взаимной корреляции между модальными формами на спектральные плотности силы ответа и на среднее квадратное значение ответа конструкции. Показано, что те исследования являются путём для упрощения расчёта по отношению к очень сложным расчётам, которые нужно было бы проводить с целью получения ответа конструкции, подвергнутой случайному сотрясительному возбуждению вызванным белым шумом.

D. Diklić, D. Diklić

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

Dynamische Probleme bei zufälliger Anregung

Im Artikel sind Untersuchungen des Einflusses seismischer Bewegungen auf Bauwerke dargestellt. Diese Untersuchungen zeigen hin auf den Wichtigkeitsgrad der Korrelation zwischen den modalen Formen auf die Spektraldichten der Anregungskraft und auf den mittleren Quadratwert der Antwort der Konstruktion. Es wird gezeigt dass diese Untersuchungen ein Weg zur Vereinfachung der Berechnung sind, im Verhältnis zu sehr komplizierten Berechnungen die durchgeführt werden müssten um die Antwort der Konstruktion zu erreichen die einer zufälligen seismischen Anregung, als "weisses Geräusch"symuliert, ausgesetzt ist.

Autori: Prof. dr. sc. **Dea Diklić**, dipl. ing. građ., Arhitektonski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, mr. sc. **Dejan Diklić**, dipl. phys., MSCS, research associate IBM /Almaden/San Jose, USA

1 Uvod

Rad se bavi analizom mnogokatnih građevina izloženih potresnom gibanju tla. Kako je potres fenomen slučajnog karaktera, konačno nigdje u prirodi nema izvjesnosti, on je jedan od najvećih rizika što se tiče života na ovoj planeti i građevina koje gradi čovjek.

U posljednjih pedesetak godina postignut je golem napredak u razumijevanju potresa, što je rezultiralo boljim modeliranjem samog gibanja tla izazvanog potresom traženjem odziva konstrukcije, boljim razumijevanjem uloge duktilnosti, disipacije energije, boljim metodama analize te proračuna konstrukcija i detalja. Iako je slučajnost ove vrste opterećenja dobro uočena, ipak se još i danas rabe pretežno deterministički potupci, zbog složenosti problema.

Svjetska literatura i zakonska regulativa pridaje toj problematici sve veće značenje.

Očito da je inženjer suočen s vrlo teškim problemom. Potrebno je napraviti optimalni proračun uz mnoga ograničenja, kao što su: vrijeme, novac, trud, treba prihvatiti prednosti svakoga mogućeg napretka u znanosti.

Tako je prepoznato da se teorija slučajnih šumova uspješno primjenjiva u digitalnim telekomunikacijskim sustavima, može također odlično primijeniti za opis svih mogućih pobuda, koje slučajno variraju, kao što su turbulentna aerodinamička opterećenja, potresna gibanja tla, djelovanja udarnog turbulentnog vjetera, gibanja tla izazvana podzemnim eksplozijama i sl. [1, 2, 3, 4].

Jasno je da su deterministički proračuni korisni za dobivanje detaljnih informacija, koje se odnose na efekte jednog potresa, ali konačan proračun konstrukcije, koja mora izdržati potresna gibanja tla što se mogu pojaviti u budućnosti, mora nužno biti temeljen na statističkim informacijama [5, 6, 7].

Teoretski okvir metodologije postoji, no najveći broj inženjera koji se bave potresnim inženjerstvom nije upućen u metode statističke mehanike, kao ni u područje akustike. Iz toga slijedi da se ova korisna metoda čini nepraktičnom osim za jednostavne konstrukcije ili se čak smatra neupotrebljivom [8].

No činjenica je da su analize temeljene na slučajnim vibracijama danas stekle zasluženu pažnju u cijelom svijetu.

Teškoće se pojavljuju u prikladnom definiranju intenziteta pobude i u pomanjkanju informacija o njoj. Kada bi postojao neograničeni skup podataka o gibanju tla, lako bi se mogao odrediti reprezentativni stohastički model uz primjenu statističke analize. No upravo su ovi podaci, u obliku akcelerograma limitirani pa čak kada bi ih i bilo vrlo mnogo za određenu regiju, oni su svi samo iz prošlosti!!! Zadaća je napraviti konstrukciju koja će biti si-

gurna u budućnosti. Nedostatak potrebnih podataka, da bi se moglo definirati opterećenje konstrukcije, razlogom je što da je u literaturi predložen cijeli niz stohastičkih modela za umjetno generiranu akceleraciju tla, koji su, kako se pokazalo u seizmički vrlo aktivnim regijama, uspješno primijenjeni [2, 3, 9, 10, 11, 12].

Veliki je broj istraživača radio i radi u tom području. Navode se samo neka reprezentativna imena: Tajimi, Kanai, Bolotin, Cornell, Housner, Bycroft, Jennings, Liu, Shinozuka, Vanmarck, Sato, Amin, Ang, Ruiz, Penzien, Gersch, Yonemoto, Spanos, Novak, Sólmes.

Svakako je posebno zanimljiv najnoviji projekt u tom području pokrenut u SAD-u. Znanstvenici pri UCLA-i razvili su novu opremu za testiranje i *monitoring* i s još 11 velikih institucija pokreću vjerojatno do sada najveći projekt u području istraživanja utjecaja potresa na konstrukcije. Radi se o specijalnim jeftinim, bežičnim senzima, koji će biti postavljeni po velikim zgradama, branama i mostovima radi mjerenja pomaka i gibanja tokom potresa. Svi će se signali iz ove mreže skupljati, procesirati i upotrijebiti da bi se razumjelo što će se događati u svezi s naprezanjem u građevinama. Za područje istraživanja odabrana je Južna Kalifornija, koja je idealno okruženje za razvoj i integraciju opreme za testiranje s obzirom na učestale seizmičke aktivnosti. Svi podaci s mreže bit će bežičnim putem proslijeđivani komandnom centru, a potom preko satelita na internet. Tako će svi istraživači biti u mogućnosti odmah dobiti sve moguće podatke koji pristižu tog trenutka. Osim toga zamišljena je naravno i provedba serije vrlo raznolikih istraživanja iz ovog područja, kao što su npr. utjecaji potresa na fleksibilne aktuatora koji se rabe u svrhu kompenzacije i mogućeg sprječavanja šteta od potresa i slično pa do uključenja demoliranja i uništenja realne građevine, da bi se došlo do maksimalno korisnih i nužnih novih spoznaja za daljnji napredak u ovom području [13].

Može se očekivati da će se Gaussov proces primijeniti kao model ili barem kao idealizacija za mnoge fizikalne fenomene.

Ovaj je proces karakteriziran osobitim probablističkim zakonom pa je time i ekstremno važan za aplikacije u praksi. Kako je kod potresnog gibanja tla ova raspodjela gotovo konstantna, može se za praktične aplikacije usvojiti da je proces stacionaran, tj. njegove funkcije gustoće vjerojatnosti su invarijantne pri pomaku vremenske skale, što je glavna simplifikacija [2, 5]. Kako su u stacionarnom procesu vremenske srednje vrijednosti u prošlosti jednake onima u budućnosti, statističke se srednje vrijednosti skupa mogu nadomjestiti s vremenskim srednjim vrijednostima bilo kojeg segmenta tog skupa pa se govori o ergodičnom procesu. U tom slučaju jedna realizacija, zapisana za dovoljno dug period vremena, poka-

zuje sve karakteristične osobine tog procesa. Takav zapis podijeljen na niz sekcija konačnog trajanja, s konačnim brojem članova, stvara ekvivalentni skup na kome se lako može provesti osrednjavanje. Zbog veće pouzdanosti ta se procedura provodi na nizu zapisa koji moraju potjecati iz većeg vremenskog intervala. Tako se dobije skup procjena, a rezultat je korektan ako su procjene gotovo svih eksperimenata jednake [1, 2, 5, 9].

Rečeno terminologijom *Teorije slučajnih procesa*, srednji dio najčešćih uzoraka jakih potresa može se razumno promatrati kao stacionarni slučajni proces, kao što je to Gaussov bijeli šum. Početna i krajnja faza, koje su prolazne, nisu stacionarne. Isto tako trešnja kod slabih potresa najčešće se modelira kao nestacionaran proces. To pokazuje da jednostavniji modeli za potresno gibanje tla, kao što je bijeli šum, ograničeni bijeli šum i slično, nisu univerzalno primjenjivi i da onaj tko se njima koristi mora jako dobro znati što u konkretnoj situaciji treba primijeniti.

U ovom se radu želi ukazati na jedan specifični problem, a to je utjecaj međukorelacije između bitnih sastavnih dijelova gibanja u različitim normalnim oblicima, na spektralne gustoće snage odziva i na srednju kvadratnu vrijednost odziva konstrukcije. Želja je bila da se dođe do zaključka može li se i kada ignorirati međukorelacija modova, radi pojednostavljena praktičnih proračuna.

U tu je svrhu prikazan jedan vrlo kratak i grub pregled cjelovitog problema, o kojem sam pisala u nizu radova, da bi se lakše mogla pratiti problematika na koju se sada želi ukazati [1, 14-21].

2 Kratki opis cjelovitog problema

a) *Modelska simulacija potresnog gibanja tla*

Slučajni proces odabran je za određenu regiju te obrađen u obliku stacionarnog i ergodičnog procesa s Gaussovom distribucijom amplituda. Kao reprezentativna realizacija za to područje usvojen je akcelerogram potresnog gibanja tla u El centro dolini 1940. godine za smjer sjever-jug, u trajanju od 30 sekunda [1, 10, 11, 12, 15, 17]. Potresno gibanje tla simulirano je modelom koji sadrži horizontalnu translacijsku komponentu ubrzanja tla. Proces je definiran svojstvom drugog reda, s tzv. spektralnom gustoćom snage (SGS). Egzaktna spektralna simulacija zahtijevala bi beskonačnu kombinaciju raznih modova, što se ne može očekivati u praksi jer je željeni stupanj točnosti teško postići, a u blizini rezonantne frekvencije sudjeluje i tako samo mali broj tonova u SGS odziva pa je gibanje tla simulirano umjetno generiranim procesom, koji ima iste statističke karakteristike kao i stvarni zapis, a oba imaju ekvivalentni spektar odgovora.

U akcelerogramu koji ima samo jedan vrh u svom spektru, bit će samo jedan prevladavajući ton kroz cijelo gibanje pa je dovoljna jednomodalna spektralna simulacija. Tako se uz primjenu kriterija o minimalnom odstupanju dobije tzv. širokopojasni stacionarni slučajni proces za koja je karakteristično da njegova srednja kvadratna spektralna gustoća ima značajne vrijednosti preko opsega frekvencija, koji je otprilike istog reda veličina kao središnja frekvencija opsega, što je ujedno razlog da se u području nižih frekvencija, na koje i odgovara jedan sustav, može aproksimirati konstantnom vrijednošću, tj. idealnim bijelim spektrom konstantne gustoće preko svih frekvencija, s tzv. bijelim šumom. Tako je određena SGS srednje kvadratne akceleracije S_0 .

Drugim riječima, kada je SGS realnog procesa praktički konstantna u promatranom frekvencijskom području te kada se selekcijski opseg sustava nalazi unutar promatranog opsega, onda je moguća zamjena realnoga ulaznog procesa s modelom bijelog šuma, jer oblik spektra ulaznog procesa izvan selektiranog opsega prijenosnog sustava ne može utjecati na rezultat analize!

Na ovaj će način građevina biti dizajnirana da odoli cijelom skupu mogućih vremenskih povijesti, koje u statističkom smislu imaju zajedničke osobine. [17, 15, 22].

b) *Model mehaničkog sustava*

Prijenosni sustav, dakle naša linearna vremenski invarijantna konstrukcija, može se shvatiti kao filter koji će biti pobuđen odabranim slučajnim procesom i koji će ovisno o svojim svojstvima definiranim njegovom receptancijom ili impulsnom receptancijom, propustiti neki valni oblik koji je ponovno slučajni proces. Kako je pobuda definirana Gaussovom raspodjelom i odziv je određen istom raspodjelom.

Da bi se problem riješio, nosač se zamjenjuje matematičko-mehaničko-parametarskim modelom, tj. sustavom linearnih diferencijalnih jednačini s eksplicitnim koeficijentima.

Kako se modelom moraju opisati ne samo elastična svojstva sustava, već i njegova inercijska i prigušna svojstva, to je iz grupe parametarskih modela najprikladnije odabrati diskretni model, tj. pojedinačnu masu, oprugu i element viskoznog prigušenja, s obzirom na složenost problema. Diskretizacija se temelji na matričnim formulacijama orijentiranim na računalu. Prikladna je naravno primjena metode konačnih elemenata i kondenzacijske tehnike. Naime kao stupnjevi slobode usvojeni su lateralni pomaci čvornih točaka, s obzirom na to da je pobuda simulirana modelom koji sadrži horizontalnu translacijsku komponentu ubrzanja tla pa se ostali stupnjevi slobode eliminiraju statičkom kondenzacijom. [1, 2, 5, 15, 22, 23].

Najčešće analiza čak i linearnih mnogokatnih građevina izloženih slučajnim vibracijama zahtijeva izvođenje ekstremno dugih izraza za tražene veličine odziva, a ti izrazi moraju biti provedeni numerički. Rješenje ovog problema jest dobro poznata *shear beam* pretpostavka, na koju je primjenjiva modalna analiza. Naime gibanje ležajeva nastoji snažno pobuditi samo najniže modove vibracija, tako da se dobre aproksimacije sustava koji imaju i vrlo velik broj stupnjeva slobode može često postići provođenjem analize za samo manji broj normalnih koordinata. Mora se istaknuti da je za efektivni tretman praktičnih vibracijskih problema gotovo nužna modalna metoda, upravo zato što eksplicitno daje doprinos svakoga normalnog moda sustava.

Za ovu studiju usvojeno je međukatno prigušenje, koje je upravo proporcionalno relativnim brzinama svakog kata, a nastaje zbog konstrukcijskog prigušenja, kao što je to npr. trenje između raznih konstruktivnih elemenata. Prigušenje je takvo, da ne postoji dinamička veza između raznih modova, tj. može ga se izraziti modalnim faktorima prigušenja.

Ponašanje sustava, uz primjenu principa modalne analize, može se opisati u ovisnosti o normalnim koordinatama $\{Y\}$. Tako se dobije skup nevezanih diferencijalnih jednačini gibanja drugog reda:

$$M_n \ddot{Y}_n + 2\xi_n \omega_n M_n \dot{Y}_n + \omega_n^2 M_n Y_n = -(V_n)^T \{m\} \ddot{x}_g(t) = P_n(t) \quad (1)$$

gdje je ω_n prirodna neprigušena kružna frekvencija n-tog modalnog oblika, ξ_n modalni faktor viskoznog prigušenja, M_n generalizirana masa pridružena n-tom modu, $Y_n, \dot{Y}_n, \ddot{Y}_n$ su amplituda, brzina i akceleracija strukture za dani modalni odziv. Generalizirana sila $P_n(t)$ rezultira iz potresne pobude. Model je izložen horizontalnoj stacionarnoj eksitaciji baze u obliku akceleracije sa SGS danom sa $S_0 \cdot (V_n)^T$, gdje je $(V_n)^T$ bezdimenzionalni transponirani vektor modalnog oblika n-tog tona.

Problem je dovoljno studirati za stabilne sustave, budući da se slobodne vibracije vrlo brzo prigušuju pa pri stacionarnom stanju više i ne postoje.

c) *Kratki prikaz odziva mehaničkog sustava*

Općenito rješenje ovih diferencijalnih jednačini s konstantnim koeficijentima, prikazani su u nizu već navedenih radova pa će se ovdje navesti samo one podatke, koji su nužni da bi se dobila podloga neophodna za razumijevanje daljnjeg istraživanja.

Ne ulazeći u moguće tehnike rješavanja ovih jednačini, teške statističke i matematičke koncepte [1, 2, 3, 5, 7],

ovdje će biti prikazane samo relacije za diskretni frekvencijski odziv koji spaja SGS slučajne pobude i odziva u obliku pomaka. Ponašanje sustava analizirano je u konceptu frekventno ovisne funkcije receptance.

Funkcija spektralne gustoće snage (SGS) za bilo koju veličinu odziva $Z(t) = \sum_n B_n Y_n(t)$ u danoj točki, gdje je

B_n modalna funkcija za $n = 1, 2, \dots, a$ $Y_n(t)$ korespondirajuća normalna koordinata, može se izraziti kao suma spektralnih gustoća u ovisnosti o normalnim modovima:

$$S_Z(\varpi) = \sum_m \sum_n S_{Z_m Z_n}(\varpi) \quad (2)$$

gdje je:

$$S_{Z_m Z_n}(\varpi) \equiv \frac{B_m B_n}{M_m M_n} \overline{\alpha_m(i\varpi) \alpha_n(i\varpi)} S_0 (V_m)^T |m\{1\}(1)^T |m\{V_n\} \quad (3)$$

i:

$$S_{Z_m Z_m}(\varpi) \equiv \frac{B_m^2}{M_m^2} |\alpha_m(i\varpi)|^2 S_0 (V_m)^T |m\{1\}(1)^T |m\{V_m\} \quad (4)$$

$S_{Z_m Z_n}$ je funkcija međuspektralne gustoće snage za modalne odzive $Z_m(t)$ i $Z_n(t)$.

$\overline{\alpha_m(i\varpi)}$ i $\alpha_n(i\varpi)$ su kompleksne frekvencijske funkcije odziva, pri čemu prvi simbol pokazuje da se radi o kompleksnom konjugatu od $\alpha_m(i\varpi)$.

Kompleksni frekvencijski odziv ili receptancija može se izraziti za n-ti modalni oblik kako slijedi:

$$\alpha_n(i\varpi) = \frac{1}{\omega_n^2 + 2i\xi_n \omega_n \varpi - \varpi^2} \quad (5)$$

ϖ je frekvencija pobude, ω_n je prirodna kružna frekvencija sustava n-tog modalnog oblika.

Dijagonalni elementi matrice receptancija su realni i dani sa:

$$|\alpha_m(i\varpi)|^2 = \frac{\omega_m^{-4}}{\left[1 - \left(\frac{\varpi}{\omega_m}\right)^2\right]^2 + 4\xi_m^2 \left(\frac{\varpi}{\omega_m}\right)^2} \quad (6)$$

Da bi se mogao uporabiti izraz (3) treba riješiti pitanje i ostalih koeficijenata spektralnog odziva $\overline{\alpha_m(i\varpi)} \cdot \alpha_n(i\varpi)$. Realni i imaginarni dijelovi ovih veličina moraju se uvesti posebno, kako slijedi:

$$\overline{\alpha_m(i\varpi)} \cdot \alpha_n(i\varpi) = (X_m + iY_m)(X_n - iY_n) = X_m X_n - i(X_m Y_n - Y_m X_n) + Y_m Y_n v = X_m X_n + Y_m Y_n \quad (7)$$

gdje je:

$$X_n = \frac{\omega_n^2 - \varpi^2}{(\omega_n^2 - \varpi^2)^2 + 4\xi_n^2 \omega_n^2 \varpi^2}$$

$$Y_n = \frac{2\xi_n \varpi \omega_n}{(\omega_n^2 - \varpi^2)^2 + 4\xi_n^2 \omega_n^2 \varpi^2} \quad (8)$$

Iz ideje modalne analize jasno je da je srednji član u (7) zanemariv. Tako se (3) može pisati:

$$S_{Z_m Z_n} \doteq \frac{B_m B_n}{M_m M_n} (X_m X_n + Y_m Y_n) \cdot S_0 \cdot (V_m)^T |m| \{1\} (1)^T |m| \{V_n\} \quad (9)$$

Kako su primarne gustoće odziva one od srednjega kvadratnog pomaka, a S_0 je gustoća snage srednje kvadratne akceleracije, glavni izrazi (4) i (9) mogu biti dani u obliku pomaka na slijedeći način:

$$S_{X_m X_m}(\varpi) = S_0 \Gamma_{mm} \cdot \frac{1}{(\omega_m^2 - \varpi^2)^2 + 4\xi_m^2 \omega_m^2 \varpi^2} \quad (10)$$

$$S_{X_m X_n}(\varpi) = S_0 \Gamma_{mn} \cdot \frac{(\omega_m^2 - \varpi^2)(\omega_n^2 - \varpi^2) + 4\xi_m \xi_n \varpi^2 \omega_m \omega_n}{\left[(\omega_m^2 - \varpi^2)^2 + 4\xi_m^2 \omega_m^2 \varpi^2 \right] \left[(\omega_n^2 - \varpi^2)^2 + 4\xi_n^2 \omega_n^2 \varpi^2 \right]} \quad (11)$$

gdje su participacijski koeficijenti:

$$\Gamma_{mm} = \frac{V_m^2}{M_m^2} (V_m)^T |m| \{1\} (1)^T |m| \{V_m\} \quad (12)$$

$$\Gamma_{mn} = \frac{V_m V_n}{M_m M_n} (V_m)^T |m| \{1\} (1)^T |m| \{V_n\} \quad (13)$$

d) *Općeniti zaključak*

Kako se vidi, ovi su rezultati veoma komplicirani, sadrže parametre koji reflektiraju mehanička svojstva građevine kao i karakteristike slučajnih vibracija, pa ih je prikladnije predočiti grafički. No o njima se ovdje ne će raspraviti, budući da je o tome već pisalo u nizu radova [1, 14, 18, 19, 21]. No sada se može primijetiti i ukazati na važnost međukorelacije između sastavnih gibanja u raznim normalnim oblicima. Problem će se, koliko je to moguće, istraživati sasvim općenito.

3 Ispitivanje utjecaja međukorelacije između raznih normalnih oblika na spektralne gustoće snage odziva

a) *Postava i rješenje zadaće*

Za potrebe ove analize uporabljena je relacija za diskretni frekvencijski odziv u ovisnosti o normalnim koordinatama koja spaja spektralne gustoće snage slučajne po-

bude i odziva u obliku pomaka te koja se može pisati u skraćenu obliku u matricnoj notaciji kako slijedi:

$$|S^Y| = |\overline{\alpha}| \cdot |S^P| \cdot |\alpha|^T \quad (14)$$

Simboli $|S^Y|$ and $|S^P|$ označavaju kvadratne matrice spektralnih gustoća snaga korespondirajućih sa $\{Y\}$ i $\{P\}$ tj. sa stupčastim matricama normalnih koordinata i odgovarajućih generaliziranih sila. $|\alpha|^T$ obilježava transponiranu dijagonalnu matricu receptancija, a $|\overline{\alpha}|$ je kompleksni konjugat od $|\alpha|$.

Ova jednadžba pokazuje osnovno ponašanje sustava, ali se može reći da je neovisna o samom sustavu jer matrica receptanci ovisi o frekvenciji pobude, o prirodnim frekvencijama sustava i koeficijentima prigušenja. Zato ta jednadžba može pokazati suštinsko ponašanje sustava, koje je specificirano u odnosu na fundamentalne vibracijske parametre, dakle koeficijenti spektralnog odziva $\overline{\alpha}_m(i\varpi) \cdot \alpha_n(i\varpi)$ su zajednički za sve sustave koji imaju n stupnjeva slobode, dok se spektralne gustoće generaliziranih sila u općem slučaju ne mogu specificirati.

Utjecaji su studirani na sustavu s 2 stupnja slobode. Svi su izrazi u bezdimenzionalnom obliku, a da bi se to dobilo svi su koeficijenti multiplicirani sa ω_1^4 . Tako se dobivaju koeficijenti $\overline{\alpha}_1 \cdot \alpha_1$ i $\overline{\alpha}_2 \cdot \alpha_2$. Realni su i dani izrazima:

$$\omega_1^4 |\alpha_1(i\varpi)|^2 = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\varpi}{\omega_1} \right)^2 \right]^2 + 4\xi_1^2 \left(\frac{\varpi}{\omega_1} \right)^2} \quad (15)$$

$$\omega_1^4 |\alpha_2(i\varpi)|^2 = \frac{1}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\varpi}{\omega_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{K^2} \right]^2 + 4\xi_2^2 \left(\frac{\varpi}{\omega_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{K^2} \right\} \cdot K^4} \quad (16)$$

ili u općem slučaju:

$$\omega_1^4 |\alpha_m(i\varpi)|^2 = \frac{1}{\left\{ \left[1 - \left(\frac{\varpi}{\omega_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{K^2} \right]^2 + 4\xi_m^2 \left(\frac{\varpi}{\omega_1} \right)^2 \cdot \frac{1}{K^2} \right\} \cdot K^4} \quad (17)$$

gdje je :

$$K = \frac{\omega_m}{\omega_1} \quad m = 1 \dots n \quad (18)$$

$\overline{\alpha_1} \cdot \alpha_2$ i $\overline{\alpha_2} \cdot \alpha_1$ su kompleksne veličine. Posljednja veličina je kompleksni konjugat od prve. One imaju i realni i imaginarni dio, koji se moraju posebno promatrati i iscrtati. U općem slučaju ovi koeficijenti su dani a sljedećim izrazima:

$$\omega_1^4 \overline{\alpha_m(i\varpi)} \cdot \alpha_n(i\varpi) = \omega_1^4 [\text{Re} - i\text{Im}] = \omega_1^4 [X_m X_n + Y_m Y_n] - i \omega_1^4 [X_m Y_n - Y_m X_n] \quad (19)$$

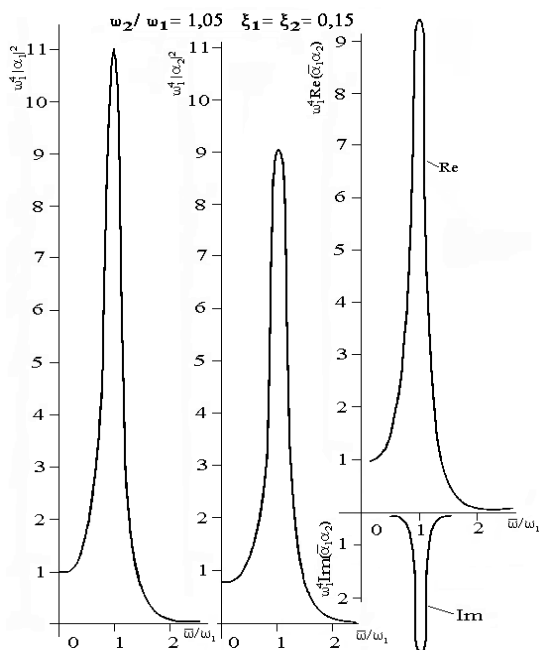
$$\omega_1^4 \overline{\alpha_n(i\varpi)} \alpha_m(i\varpi) = \omega_1^4 \text{Re} + i \omega_1^4 \text{Im} \quad (20)$$

gdje su realni dijelovi definirani sa:

$$\omega_1^4 \text{Re} = \frac{1}{N} \left\{ \left[\left(\frac{\omega_m}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\varpi}{\omega_1} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\omega_n}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\varpi}{\omega_1} \right)^2 \right] + 4 \xi_m \xi_n \left(\frac{\varpi}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{\omega_m}{\omega_1} \right) \left(\frac{\omega_n}{\omega_1} \right) \right\} \quad (21)$$

a imaginarni sa:

$$\omega_1^4 \text{Im} = \frac{1}{N} \left\{ \begin{aligned} &2 \xi_n \frac{\varpi}{\omega_1} \frac{\omega_n}{\omega_1} \left[\left(\frac{\omega_m}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\varpi}{\omega_1} \right)^2 \right] \\ &- 2 \xi_m \frac{\varpi}{\omega_1} \frac{\omega_m}{\omega_1} \left[\left(\frac{\omega_n}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\varpi}{\omega_1} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

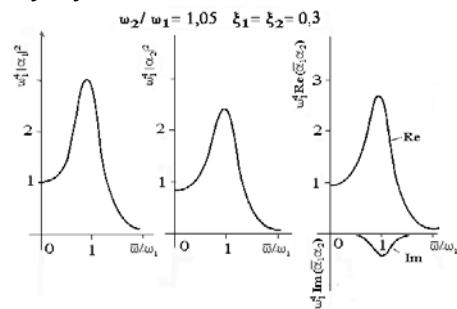


Slika 1. Koeficijenti spektralnog odziva

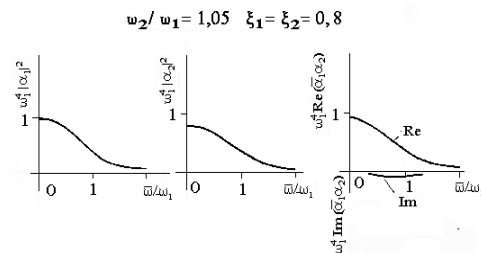
Nazivnik N je jednak:

$$N = \left\{ \left[\left(\frac{\omega_m}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\varpi}{\omega_1} \right)^2 \right]^2 + 4 \xi_m^2 \left(\frac{\omega_m}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{\varpi}{\omega_1} \right)^2 \right\} \left\{ \left[\left(\frac{\omega_n}{\omega_1} \right)^2 - \left(\frac{\varpi}{\omega_1} \right)^2 \right]^2 + 4 \xi_n^2 \left(\frac{\omega_n}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{\varpi}{\omega_1} \right)^2 \right\} \quad (23)$$

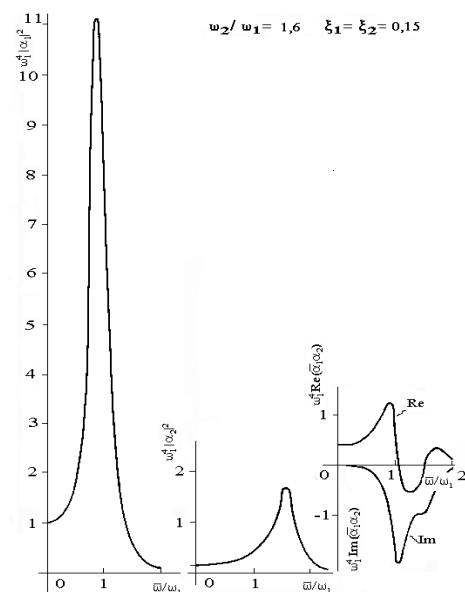
Svi su koeficijenti iscrtani za sustav s 2 stupnja slobode kao funkcije od ϖ/ω_1 . Analizirano je više interesantnih varijacija omjera ω_2/ω_1 , kao i više slučajeva prigušenja, što je sve vidljivo iz slika 1. do 8. u kojima su prikazani koeficijenti spektralnog odziva za razne kombinacije ω_2/ω_1 te ξ_1 i ξ_2 .



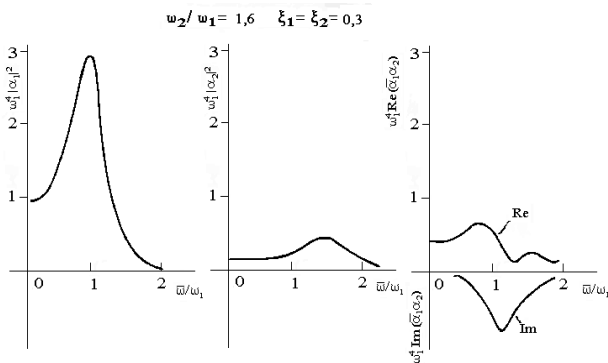
Slika 2. Koeficijenti spektralnog odziva



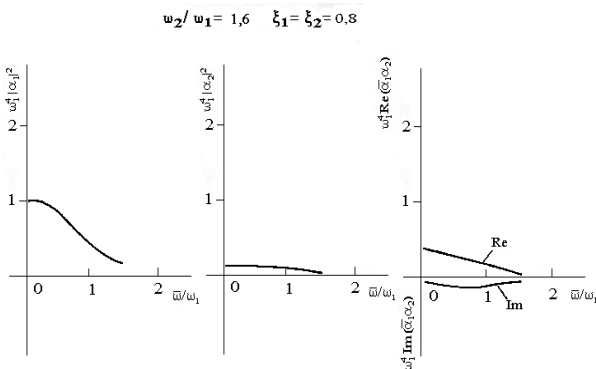
Slika 3. Koeficijenti spektralnog odziva



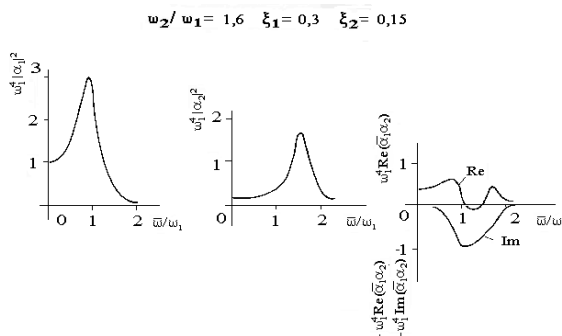
Slika 4. Koeficijenti spektralnog odziva



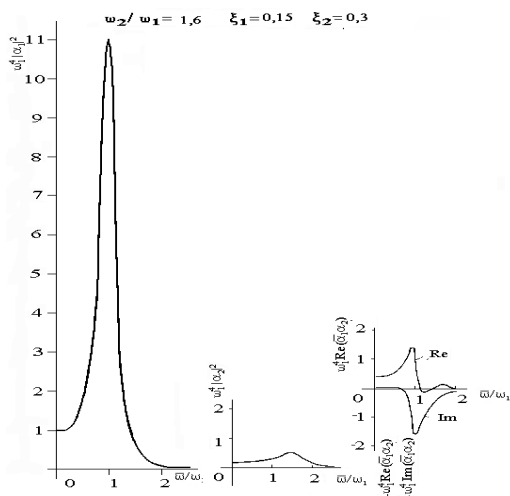
Slika 5. Koeficijenti spektralnog odziva



Slika 6. Koeficijenti spektralnog odziva



Slika 7. Koeficijenti spektralnog odziva



Slika 8. Koeficijenti spektralnog odziva

b) Analiza rezultata I.

Iz dobivenih dijagrama mogu se izvući sljedeći zaključci:

1. Ako je omjer $\omega_2/\omega_1 = 1,05$, tj. prirodne frekvencije su gotovo jednake, a prigušenja se mijenjaju od niskog k visokom, $\xi = 0,15, 0,3$ i $0,8$, ali su jednaka za oba moda, koeficijenti spektralnog odziva su istog reda veličina (slike 1. do 3.). Dakle doprinosi svih članova pa i međuspektralnih gustoća ukupnom odzivu su znatni. Doprinosi su općenito to veći što je prigušenje manje. Doprinosi imaginarnog dijela čine se zanemarivima.
1. U slučaju dobro separiranih vlastitih frekvencija $\omega_2/\omega_1 = 1,6$, bez obzira o kolikom se prigušenju radi, ali uz uvjet da su jednaka za oba moda, primjećuje se da su doprinosi međuspektralnih gustoća bitno reducirani (slike 4. do 6.). Posebno se velika redukcija zamjećuje u slučaju malih prigušenja (slika 4.) gdje je očito da se utjecaji ovih članova mogu zanemariti. Čak je i utjecaj člana $|\alpha_2(i\omega)|^2$ zanemariv.
2. U slučaju dobro separiranih vlastitih frekvencija $\omega_2/\omega_1 = 1,6$, a za veliko prigušenje u prvom tonu i malo u drugom, najveći je utjecaj koeficijenta $\bar{\alpha}_1 \cdot \alpha_1$, a nešto manji $\bar{\alpha}_2 \cdot \alpha_2$, dok se utjecaj koeficijentata međuspektralnih gustoća ne bi trebao zanemariti (slika 7.).
3. Ako je omjer $\omega_2/\omega_1 = 1,6$, s malim prigušenjem u prvom modu i velikim u drugom, utjecaj $\bar{\alpha}_1 \cdot \alpha_1$ je dominantan, dok su koeficijenti $\bar{\alpha}_2 \cdot \alpha_2$ i koeficijenti međuspektralnih gustoća zanemarivi (slika 8.).

4 Značaj međukorelacije između normalnih modova i srednjeg kvadratnog odziva

a) Postava i rješenje zadaće

Srednji kvadratni odziv za bilo koju generaliziranu koordinatu, uza sve dane uvjete, dobije se tako da se izvrši integracija SGS pobude preko svih frekvencija prema konačnom izrazu koji odgovara sustavu sa dva stupnja slobode. Kada je pobuda bijela, tada su elementi SGS generaliziranih sila neovisni o frekvenciji pa se taj član može staviti pred integral, a isto tako i dvosrtuka suma modalnih koeficijenata B. Tako postaje srednja kvadratna vrijednost odziva jednaka:

$$\sigma_Z^2 = \sum_{m=1,2} \sum_{n=1,2} \frac{B_m B_n}{M_m M_n} \cdot S_{P_m P_n} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\alpha_m(i\omega)} \cdot \alpha_n(i\omega) d\omega \quad (24)$$

Odavde se može lako uočiti da su interesantne relativne veličine svih integrala tipa :

$$I_{m,n} = \int_0^{\infty} \overline{\alpha_m(i\omega)} \cdot \alpha_n(i\omega) d\omega \quad (25)$$

$$\omega_1^3 I_{m,n} = \frac{4\pi \left(\xi_m \frac{\omega_m}{\omega_1} + \xi_n \frac{\omega_n}{\omega_1} \right)}{\left[\left(\xi_m \frac{\omega_m}{\omega_1} + \xi_n \frac{\omega_n}{\omega_1} \right)^2 + \left(\frac{\omega_m}{\omega_1} \sqrt{1-\xi_m^2} - \frac{\omega_n}{\omega_1} \sqrt{1-\xi_n^2} \right)^2 \right] \cdot \left[\left(\xi_m \frac{\omega_m}{\omega_1} + \xi_n \frac{\omega_n}{\omega_1} \right)^2 + \left(\frac{\omega_m}{\omega_1} \sqrt{1-\xi_m^2} + \frac{\omega_n}{\omega_1} \sqrt{1-\xi_n^2} \right)^2 \right]} \quad (26)$$

$$\omega_1^3 I_{1,1} = \frac{4\pi \left(\xi_1 + \xi_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)}{\left[\left(\xi_1 + \xi_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + \left(\sqrt{1-\xi_1^2} - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sqrt{1-\xi_1^2} \right)^2 \right] \cdot \left[\left(\xi_1 + \xi_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + \left(\sqrt{1-\xi_1^2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \sqrt{1-\xi_1^2} \right)^2 \right]} = \frac{\pi}{2\xi_1} \quad (27)$$

$$\omega_1^3 I_{2,2} = \frac{4\pi \left(\xi_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} + \xi_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)}{\left[\left(\xi_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} + \xi_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \sqrt{1-\xi_2^2} - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sqrt{1-\xi_2^2} \right)^2 \right] \cdot \left[\left(\xi_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} + \xi_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \sqrt{1-\xi_2^2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \sqrt{1-\xi_2^2} \right)^2 \right]} = \frac{\pi}{2\xi_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^3} \quad (28)$$

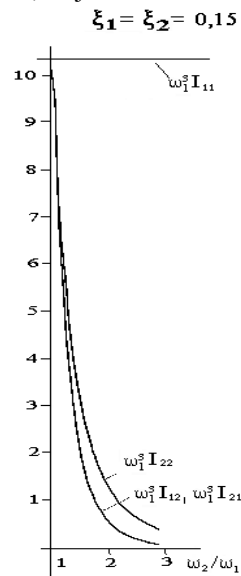
$$\omega_1^3 I_{1,2} = \omega_1^3 I_{2,1} \quad (29)$$

$$\omega_1^3 I_{1,2} = \frac{4\pi \left(\xi_1 + \xi_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)}{\left[\left(\xi_1 + \xi_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + \left(\sqrt{1-\xi_1^2} - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sqrt{1-\xi_2^2} \right)^2 \right] \cdot \left[\left(\xi_1 + \xi_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + \left(\sqrt{1-\xi_1^2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \sqrt{1-\xi_2^2} \right)^2 \right]} \quad (30)$$

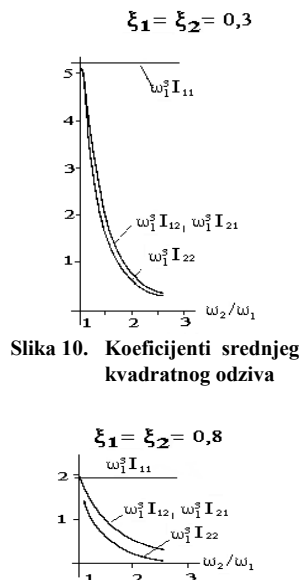
Ovo je konturni integral, gdje je ω kompleksna varijabla. Vrijednost ovog integrala može se dobiti metodom reziduuma [1]. Da bi se dobile relativne bezdimenzionalne veličine ovog integrala, treba njegovu lijevu i desnu stranu pomnožiti sa ω_1^3 te provesti još neke transformacije da bi se dobio izraz (26):

Iz ovog izraza dobiju se za razne odnose prigušenja tonova, željene relativne vrijednosti odziva.

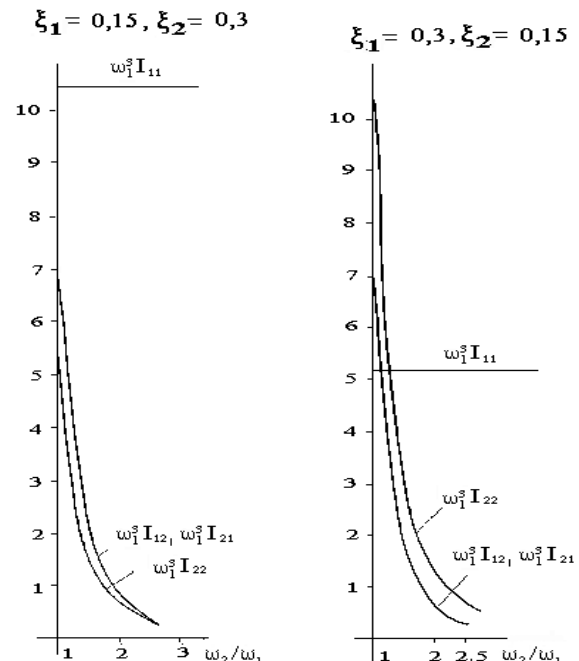
Za sustav sa dva stupnja slobode, tražene bezdimenzionalne vrijednosti promatrane su kao funkcije od ω_2/ω_1 u intervalu [1,0 , 2,5] i prikazane su na slikama 9. do 13. za razne vrijednosti ξ_1 i ξ_2 . Konkretno su vrijednosti integrala dane izrazima (27) do (30).



Slika 9. Koeficijenti srednjeg kvadratnog odziva



Slika 11. Koeficijenti srednjeg kvadratnog odziva



Slike 12. i 13. Koeficijenti srednjeg kvadratnog odziva

b) *Analiza rezultata II.*

Iz provedenog ispitivanja može se doći do sljedećih zaključaka:

1. Uočava se da je doprinos srednjoj kvadratnoj vrijednosti odziva međuspektralnih gustoća dviju normalnih koordinata to manji što su prirodne frekvencije bolje separirane, a prigušenja manja. Apsolutno je dominantan utjecaj člana $\omega_1^3 \cdot I_{11}$ (slike 9. do 11.).
2. No što vlastite frekvencije padaju bliže jedna drugoj, to su ostali utjecaji sve zanemariviji. U slučaju $\xi_1 = 0,3$ i $\xi_2 = 0,15$ (slika 13.), radi većeg prigušenja I. tona, utjecaji $\omega_1^3 \cdot I_{22}, \omega_1^3 \cdot I_{12}, \omega_1^3 \cdot I_{21}$ nadmašuju utjecaj od $\omega_1^3 \cdot I_{11}$, ali samo u uskoj zoni slabo separiranih prirodnih frekvencija. Za dobro separirane prirodne frekvencije ponovno prevladava utjecaj prvog tona.
3. U obrnutom slučaju, kad je $\xi_1 = 0,15$, $\xi_2 = 0,3$ dominantan je utjecaj od $\omega_1^3 \cdot I_{11}$ (slika 12.) pa čak i u slučaju da se vlastite frekvencije približavaju jedna drugoj.
4. Iako su ovi rezultati dani za sustave sa dva stupnja slobode, imaju neposrednu važnost i za sustave s više stupnjeva slobode i podjednako su primjenjivi za bilo koji par normalnih koordinata, jednostavnom zamjenom indeksa.
5. Iz priloženih se grafova lako može zaključiti da je doprinos međuspektralnih gustoća onog para modova čije dvije prirodne frekvencije padaju blizu jedna drugoj znatan. To ima za posljedicu da se za određeni opseg frekvencija mogu ignorirati međukorelacije modova, što znači da kvadratna matrica spektralnih gustoća normalnih koordinata, koje su u relaciji s odgovarajućim generaliziranim silama, postaje dijagonalna. To međutim ne znači da će biti dijagonalna

i matrica $|S^q|$ ili $|S^{\ddot{x}_g}|$, što bi se moglo shvatiti tako da će biti praktički važna korelacija između elemenata \ddot{x}_g i $\{q\}$.

5 Zaključci

Ako je prigušenje malo, što je čest slučaj u vibracijskim problemima, te ako su vršci u odzivu dobro separirani, izrazi za funkciju SGS mogu se bitno pojednostaviti, tako da se svi članovi koji predstavljaju međusobnu vezu, tj. članovi $S_{Z_m Z_n}$ mogu zanemariti u odnosu na dijagonalne članove. SGS ima vrškove u blizini upravo prirodnih frekvencija sustava i kod svake od spomenutih frekvencija prevladava samo jedan član sume. Dakle dominantno gibanje u svakom tonu dogodit će se samo onda, kada poremećajna frekvencija ω poprimi vrijednost blizu korespondirajuće prirodne frekvencije sustava, dakle blizu rezonancije. Tada na mjestu prve prirodne frekvencije dominira utjecaj prvoga tona, na mjestu druge utjecaj drugoga tona, a pretežni pomak je u smjeru upravo onog pomaka, koji je sadržan u vlastitom normalnom obliku. Time se reducira odziv kod svake frekvencije na doprinos pojedinačnoga normalnog moda pa se problem svodi na problem od po jednog stupnja slobode.

Kako je dobro poznato, pažnja inženjera fokusirana je na niskofrekvencijske oscilacije, budući da su najniži vibracijski modovi općenito oni koji su vezani za najveće pomake, najveće napone i strukturalne lomove, tako da će obično mali broj normalnih koordinata biti dovoljan da se dobije dobra simulacija. Činjenica je da će vrlo često biti nadmoćan pojedinačni mod, a to je od velikog praktičnog interesa. Dakle hipoteza bijelog šuma vrlo je zanimljiva upravo radi dobivanja brze i dobre aproksimacije i u razvijanju strategije seizmičkog proračuna građevina.

LITERATURA

- [1] Diklić, D.: *Prilog stohastičkoj analizi ponašanja konstrukcija pod djelovanjem potresa*, Doktorska disertacija, FGZ 1983.
- [2] Crandall, S. H.; Mark, W. D.: *Random vibration in Mechanical Systems*, Academic Press, 1973
- [3] Robson, J. D.; Dodds, C. J.; *Macvean Paling: Random Vibrations*, Udine 1971
- [4] Doob, J. L.; Ornstein, L. S.; Uhlenbeck, G. E.; Rice, S.O.; Ming Chen Wang, Katz, Chandrasekhar: *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, Dover Publications, INC. New York
- [5] Clough, R. W.; Penzien, J.: *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1993.
- [6] Chopra, A. H.: *Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Prentice Hall, 1995.
- [7] Elishakoff, I.: *Probabilistic Theory of Structures*, Dover Publications, 1999.
- [8] Diklić, D.: *Perspektive probabilističke analize u zemljotresnom inženjerstvu*, Građevinar 39 (1986) 8, 325.-326.
- [9] Soong, T. T.; Grigoriu, M.: *Random Vibration of Mechanical and Structural Systems*, Prentice-Hall, 1993.
- [10] Trifunac, M. D.; Hudson, D. E.; Udawadia, Vijayaraghavn, Brady, *Analysis of Strong Motion Accelerograms*, Vol. IV. Fourier Amplitude Spectra, Part A, Report EERL- 72-100- Earthquake Eng. Research Laboratory, Pasadena 1972.
- [11] Yhaveri, L.: *Spectral and Correlation Analysis of Ground-Motion Accelerograms*. Bulletin of Seismological Society of America, Vol. 59, No. 4, 1517-1534, August 1969.

-
- [12] Bycroft, G. N.: *White Noise Representation of Earthquakes*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 86, 1-16, 1960.
- [13] Internet: *UCLA earthquake network sensors will improve building safety*
- [14] Brčić, V.; Diklić, D.: *Metodologija rješavanja dinamičkih problema pri stohastičkoj pobudi*, VIII kongres SDGKJ, Cavtat, 1987., knjiga T-13, 77.-83.
- [15] Brčić, V.; Diklić, D.: *Neke napomene o analizi odgovora konstrukcije pri stohastičkoj dinamičkoj pobudi*, Akademija nauka i umjetnosti BiH, YU-ISSN 030- 008X, LXXXV, knjiga 12, Sarajevo 1988., 23.-37.
- [16] Diklić, D.: *Parametar Study of the Auto-correlation Function of Response to a Purely Random Earthquake process*, Eurobuild Conference on Design, Construction and Repair of Buildings Structures in Earthquake Zones, Dubrovnik, 1987., 114-121.
- [17] Diklić, D.: *Stohastička prezentacija potresnog gibanja tla*, Građevinar 38 (1986)10, 389.-394.
- [18] Diklić, D.: *Odgovor mehaničkog sistema na slučajnu pobudu*, Građevinar 39 (1986) 12, 453.-461.
- [19] Diklić, D.: *Stohastički odgovor linearnog sistema na potresno gibanje*, Zbornik radova II. kongresa DGKH, Split 1986., 75.-81.
- [20] Diklić, D.: *Mehanički sistem s jednim stupnjem slobode pobuđen bijelim šumom*, JDM, 18. Jugoslavenski kongres teorijske i primjenjene mehanike, Vrnjačka Banja, 1988., knjiga A, Opća mehanika, A-20, 77.-80.
- [21] Diklić, D.; Diklić, D.: *Comparativ study of spectral response coefficients for stochastic earthquake ground motion*, Engineering modelling 11, (1998), 3-4, 73-84.
- [22] Harris, C. M.: *Shock and Vibration Handbook*, McGraw-Hill, 1989.
- [23] Zienkiewicz, O.; Taylor, C.: *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, London, 1989.
-