

Primljen / Received: 30.7.2016.

Ispravljen / Corrected: 19.2.2017.

Prihvaćen / Accepted: 28.2.2017.

Dostupno online / Available online: 10.3.2018.

# Periodi i oblici titranja uobičajenih okvirnih AB građevina

## Autori:



**Mohamed Chennit**, dipl.ing.građ.  
Sveučilište za znanost i tehnologiju  
Houari Boumediene, Alžir  
[chenmoh@gmail.com](mailto:chenmoh@gmail.com)



Prof.dr.sc. **Djilali Benouar**, dipl.ing.građ.  
Sveučilište za znanost i tehnologiju  
Houari Boumediene - Alžir  
Građevinski fakultet  
[dbenouar@gmail.com](mailto:dbenouar@gmail.com)



Izv.prof.dr.sc. **Abdelkrim Bourzam**, dipl.ing.građ.  
Sveučilište za znanost i tehnologiju  
Houari Boumediene - Alžir  
Građevinski fakultet  
[bourzam@gmail.com](mailto:bourzam@gmail.com)

Prethodno priopćenje

**Mohamed Chennit, Djilali Benouar, Abdelkrim Bourzam**

## Periodi i oblici titranja uobičajenih okvirnih AB građevina

U ovom se radu predlože teoretska metoda koja omogućuje određivanje oblika titranja okvirnih AB građevina s identičnim katovima ili s prvim ili zadnjim katom različitim od ostalih. Kao rezultat istraživanja, tablično su prikazani svi prirodni oblici titranja građevina s dva do deset identičnih katova. Ti se rezultati mogu proširiti na veći broj katova (više od deset). Predlaže se i matematička metoda za određivanje karakterističnih koeficijenata polinoma za posebnu trodijagonalnu matricu.

### Ključne riječi:

građevina, prirodni period, vlastiti oblici, oblici titranja, vlastiti vektori, vlastita vrijednost

Scientific Paper – Preliminary report

**Mohamed Chennit, Djilali Benouar, Abdelkrim Bourzam**

## Periods and vibration modes for common RC frame structures

A theoretical method allowing determination of vibration modes for RC frame structures with identical floors, or with either the first or the last floor differing from other floors, is proposed in the paper. As a result of the research, all natural vibration modes for buildings with two to ten identical storeys are presented in a table. These results can be extended to include a greater number of floors (more than ten). A mathematical method for determining characteristic polynomial coefficients of a specific tridiagonal matrix is also proposed.

### Key words:

structure, natural period, mode shapes, vibration modes, eigenvectors, eigenvalue

Vorherige Mitteilung

**Mohamed Chennit, Djilali Benouar, Abdelkrim Bourzam**

## Schwingungszeiträume und -formen üblicher Stahlbetongebäude

In dieser Abhandlung wird eine theoretische Methode vorgeschlagen, welche die Bestimmung der Schwingungsformen von allgemeinen Stahlbetongebäuden mit identischen Stockwerken oder mit einem unterschiedlichen ersten oder letzten Stockwerk ermöglicht. Als Ergebnis der Untersuchung sind alle natürlichen Formen der Gebäudeschwingung mit zwei bis zehn identischen Stockwerken tabellarisch dargestellt. Diese Ergebnisse können auf eine größere Anzahl an Stockwerken (mehr als zehn) erweitert werden. Vorgeschlagen wird auch eine mathematische Methode zur Bestimmung der charakteristischen Polynomkoeffizienten für eine spezielle dreidimensionale Matrix.

### Schlüsselwörter:

Gebäude, natürlicher Zeitraum, eigene Formen, Schwingungsformen, eigene Vektoren, eigener Wert

### 1. Uvod

Za seizmičko projektiranje građevina treba se provesti bilo teoretska ili eksperimentalna analiza prirodnih oblika titranja. Za te je potrebe razvijeno nekoliko metoda baziranih na korištenju eksperimentalnih podataka, uključujući i razvoj empirijskih formula za određivanje prirodnog perioda, što općenito ovisi o visini građevine ili o broju katova. Neki autori poput onih iz [1-4] analizirali su takve eksperimentalne metode. Neki autori analizirali su i teoretske metode, kao što se može vidjeti u radovima [5-7]. Dijagonalizaciju Jacobijeve metode razvio je i doradio Hochstenback [8]. Saad [11] je dopunio metodu potencije koju opisuju Golub i Van Loan [9] isto kao i Arnoldijevu metodu [10]. Neki autori poput Crouzeixa [13] i Morgana [14] analizirali su Davidsonovu metodu [12]. Verderam [15] i Oliveira [16] usporedili su rezultate dobivene eksperimentalnim mjerenjima s rezultatima koji su izvedeni numeričkim proračunima na bazi analitičkih metoda. Određivanje svih vlastitih oblika titranja privuklo je pažnju mnogih autora poput Tonga [17].

Metoda prikazana u ovom radu razvijena je u svrhu teoretskog određivanja svih prirodnih oblika titranja. Metoda se bazira na određivanju polinoma označenog kao P koji je izveden iz determinante  $P = || [K] - \omega^2 [M] ||$ , gdje vrijednosti [K], [M] i  $\omega$  predstavljaju redom matricu krutosti, matricu mase i prirodnu kružnu frekvenciju građevine. Korijeni tog polinoma su prirodne kružne frekvencije građevine.

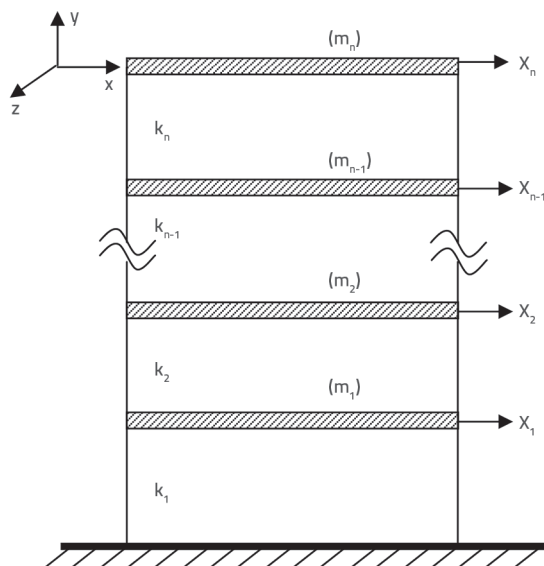
Tijekom razvoja polinoma za građevine s "n" identičnih katova, naglasak se stavlja na postupak koji omogućuje određivanje koeficijentata polinoma. Nakon određivanja tih polinoma, definira se njihova rezolucija i to primjenom numeričkih metoda za izračunavanje korijena polinoma sa stupnjem n. Ti se korijeni koriste za izvođenje frekvencije građevine. Zatim se za svaku vrijednost prirodne frekvencije izračunavaju vlastiti vektori. Na taj se način dobiva baza podataka koja sadrži sve prirodne oblike titranja za građevine od dva do deset katova (pri čemu postoji mogućnost povećanja broja katova). Kako bi se proširilo područje primjene takve metode, u ovom se radu razmatraju i dva dodatna slučaja koji se najčešće susreću u praksi. Ti slučajevi su građevine kod kojih se najniži ili najviši kat razlikuje od ostalih katova.

U ovom se radu predlaže jednostavna i djelotvorna metoda za određivanje svih prirodnih oblika titranja koji su potrebni za seizmičko projektiranje građevina. Osim toga, u predloženoj su tablici sažeto prikazani svi oblici titranja za građevine s dva do deset jednakih katova. Ti se rezultati mogu koristiti i za veći broj katova (više od deset). Primjenom ove tablice, za takve se građevine jednostavno mogu odrediti svi prirodni oblici, bez potrebe za ponavljanjem proračuna.

## 2. Građevine s "n" identičnih katova

### 2.1. Modeliranje

U dinamičkoj analizi građevina obično se, pa čak i vrlo često, masa kata koncentrira na odgovarajućoj međukatnoj konstrukciji, kao što je prikazano na slici 1.



Slika 1. Modeliranje građevine

Za krutost i masu pojedinačnih katova koriste se oznake  $k_i$  tj.  $m_i$ , a  $x_i$  je pomak svakog kata. Pretpostavlja se sljedeće:

- Katovi nisu podložni deformacijama, a stupovi su obostrano upeti.
- Mase su koncentrirane na katnim konstrukcijama.
- Svaki kat ima horizontalni pomak  $x_i$  u smjeru ( $xx'$ ), a rotacija je onemogućena.

Matrica krutosti za broj identičnih katova "n" izražava se kako slijedi:

$$[K] = k [K] \tag{1}$$

gdje je k krutost svakog kata u horizontalnom smjeru, a matrica [K] iznosi:

$$[K] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

### 2.2. Kružne frekvencije

Red matrice  $[K]$  ovisi o broju stupnjeva slobode. Ta je matrica posebna trodijagonalna matrica. Takvu vrstu matrice proučavalo je nekoliko autora kao što su Buchholzer [18], Jia [19] i Hou-Bia [20]. Matrica mase [M] iskazuje se pomoću jednadžbe (3) na sljedeći način:

$$[M] = m [I] \tag{3}$$

gdje je m masa svakog kata, a [I] je jedinična matrica, pri čemu red ovisi o broju stupnjeva slobode.

Kružne frekvencije titranja dobivaju se rješavanjem jednadžbe (4):

$$\| [K] - \omega^2 [M] \| = 0 \tag{4}$$

Ako matrice [K] i [M] zamijenimo njihovim izrazima, tada jednadžba (4) poprima sljedeći oblik:

$$\left\| [\bar{K}] - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} [I] \right\| = 0 \text{ uz } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{5}$$

Jednadžba (5) može se iskazati i kao:

$$\| [\bar{K}] - \alpha [I] \| = 0 \text{ gdje je } \alpha = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \tag{6}$$

Polinom  $P_n(\alpha) = \| [\bar{K}] - \alpha [I] \|$  omogućava određivanje vlastitih frekvencija i vlastitih vektora za bilo koju građevinu s "n" identičnih katova. Taj polinom neovisan je o vrijednostima krutosti k niti o masama m.

Nakon određivanja korijena polinoma  $P_n(\alpha)$ , izvode se kružne frekvencije, a za to se koristi sljedeći odnos:

$$\omega^2 = \alpha \cdot \omega_0^2 \text{ uz } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{7}$$

Polinom za okvirne AB građevine s raznim brojem katova razvijen je na sljedeći način:

- nula katova (virtualna građevina):  $P_0(\alpha) = 1$  ( $a_{11}=1$ , tablica 1.)
- jedan kat:  $P_1(\alpha) = 1-\alpha$
- dva identična kata:  $P_2(\alpha) = 1-3\alpha+\alpha^2$
- tri identična kata:  $P_3(\alpha) = 1-6\alpha+5\alpha^2-\alpha^3$
- četiri identična kata:  $P_4(\alpha) = 1-10\alpha+15\alpha^2-7\alpha^3+\alpha^4$
- pet identičnih katova:  $P_5(\alpha) = 1-15\alpha+35\alpha^2-28\alpha^3+9\alpha^4-\alpha^5$ .

Na bazi te razrade definiran je postupak za određivanje svih koeficijenata polinoma  $P_n(\alpha)$ . Sažeti prikaz tog postupka prikazan je u tablici 1. Za određivanje točnih koeficijenata polinoma potrebno je, prema algoritamskoj logici, početi matricu iz tablice 1. s  $a_{11} = 1$ . Isto objašnjenje vrijedi za građevine u kojima se najviši i najniži kat razlikuje od ostalih katova (vidi tablice 4. i 5.). Svaki koeficijent određuje se zbrajanjem svih koeficijenata u stupcu koji se nalazi lijevo i iznad dotičnog koeficijenta i vrijednosti koeficijenta koji se nalazi neposredno iznad (iz tablice 1., koeficijent 15 = 1+3+6+5). Prvi koeficijent polinoma je 1. Svi koeficijenti bilo kojeg polinoma koji odgovara građevini s "n" katova ("n" stupanj slobode) mogu se odrediti počevši od jednog stupnja slobode koji odgovara polinomu  $P_1(\alpha) = 1-\alpha$ . Potrebno je napomenuti da polinom ima izmjenične predznake. Koeficijenti polinoma izražavaju se kako slijedi:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & j > i \\ 1 & j = i \\ a_{(i-1)j} + \sum_{k=1}^{j-1} a_{k(j-1)} & i = 1, \dots, n \\ & 2 \leq j \leq i \end{cases} \tag{8}$$

Treba napomenuti da za broj katova (BK) vrijedi  $(i-1)$ : BK =  $i-1$ . Polinom građevine s "n" katova iznosi:

$$P_n(\alpha) = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_{(n+1)(k+1)} \alpha^k \tag{9}$$

Nakon iskazivanja tih polinoma, trebaju se izolirati njihovi korijeni  $\alpha_i$  primjenom algoritma koji su razvili Akritas i dr. [21]. Nakon toga se primijeni metoda bisekcije za približavanje tim korijenima.

Nekoliko se metoda primjenjuje za određivanje karakterističnih polinoma. Jedna od njih, metoda La Budde, najbliža je metodi koja se predlaže u ovom radu.

Tablica 1. Koeficijenti polinoma  $P_n(\alpha)$  za okvirne AB građevine s identičnim brojem katova

Broj katova	Rast stupnja polinoma										
0	$a_{11}=1$										
1	$a_{21}=1$	1									
2	1	3	1								
3	1	6	5	1							
4	1	10	15	7	1						
5	1	15	35	28	9	1					
6	1	21	70	84	45	11	1				
7	1	28	126	210	165	66	13	1			
8	1	36	210	462	495	286	91	15	1		
9	1	45	330	924	1287	1001	455	120	17	1	
10	1	55	495	1716	3003	3003	1820	680	153	19	1

Metoda La Budde sastoji se od dvije faze: u prvoj fazi se reducira [A] na gornji Hessenbergov oblik [H] s ortogonalnim transformacijama sličnosti, a u drugoj se fazi izračunava karakteristični polinom [H] ponavljanjem podmatrica. Ako su vrijednosti [H] i [A] slične, isti su im karakteristični polinomi. Ako je [A] simetrična, tada je [H] simetrična trodijagonalna matrica, a metoda La Budde pojednostavljuvanjem se svodi na Sturmovu metodu nizova [22]. Taj slučaj odgovara istraživanju koje se izlaže u ovom radu. La Buddeov algoritam za izračunavanje koeficijenata karakterističnog polinoma iskazan je u nastavku rada.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

gdje je [A] simetrična trodijagonalna matrica (n x n).

U postupku izračunavanja karakterističnog polinoma, Sturmovom metodom nizova izračunavaju se karakteristični polinomi  $P_i(\lambda) = \det(\lambda I - T_i)$  svih glavnih vodećih podmatrica  $T_i$  reda i, gdje je  $P_n(\lambda) = P(\lambda)$ . Rekurzija za izračunavanje  $P(\lambda)$  prikazana je u jednadžbi (11) [22, 9]:

$$P_n(\lambda) = \begin{cases} P_0(\lambda)=1, & P_1(\lambda)=1-a \\ P_i(\lambda)=(\lambda-a_i)P_{i-1}(\lambda)-b_i^2 P_{i-2}(\lambda) & 2 \leq i \leq n \end{cases} \quad (11)$$

Kako bi se iz rekurzije jednadžbe (11) dobili pojedinačni koeficijenti  $P(\lambda)$ , određuju se koeficijenti polinoma kako je to prikazano u jednadžbi (12), [22, 9]:

$$P(\lambda) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n \quad (12)$$

$$P_i(\lambda) = \lambda^i + c_1^i \lambda^{i-1} + \dots + c_{i-1}^i \lambda + c_i^i \quad 1 \leq i \leq n$$

Tablica 2. La Buddeova metoda za simetričnu trodijagonalnu matricu (n x n)

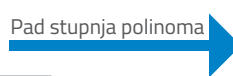
	$C_{1n}$	$C_{2n}$	$C_{3n}$	...	$C_{n-1,n}$	$C_{nn}$
1	$c_{11} = -a_1$					
2		$a_1 a_2 - b_2^2$				
3			$-a_3 c_{22} - b_3^2 c_{11}$			
				...		
k	$c_{1k-1} - a_k$	$c_{2,k-1} - a_k c_{1,k-1} - b_k^2 c_{1,k-2}$	$c_{3,k-1} - a_k c_{2,k-1} - b_k^2 c_{1,k-2}$			
					$-a_{n-1} c_{n-2,n-2} - b_{n-1}^2 c_{n-3,n-3}$	
n	$c_{1n-1} - a_n$	$c_{2,n-1} - a_n c_{1,n-1} - b_n^2 c_{1,n-2}$	$c_{3,n-1} - a_n c_{2,n-1} - b_n^2 c_{1,n-2}$	...	$c_{n-1,n-1} - a_n c_{n-2,n-1} - b_n^2 c_{n-3,n-2}$	$-a_n c_{n-1,n-1} - b_n^2 c_{n-2,n-2}$

Algoritam za izračunavanje koeficijenata karakterističnog polinoma simetrične trodijagonalne matrice [A] prikazan je u tablici 2., prema [22].

$C_{kn}$  je k-ti koeficijent karakterističnog polinoma simetrične trodijagonalne matrice (n x n). Koeficijenti matrice (7x7) iz jednadžbe (2) izračunavaju se pomoću La Buddeove metode. Rezultati dobiveni ovim algoritmom sažeto su prikazani u tablici 3.

Tablica 3. Koeficijenti simetrične trodijagonalne matrice (7 x 7) dobiveni pomoću La Buddeove metode

	$C_{17}$	$C_{27}$	$C_{37}$	$C_{47}$	$C_{57}$	$C_{67}$	$C_{77}$
	-2						
	-4	3					
	-6	10	-4				
	-8	21	-20	5			
	-10	36	-56	35	-6		
	-12	55	-120	126	-56	7	
n = 7	-13	66	-165	210	-126	28	-1



Kako bi se izračunali koeficijenti karakterističnog polinoma pomoću La Buddeove metode, trebaju se odrediti međuvrijednosti, a one služe samo za dobivanje koeficijenata razmatranog polinoma. S druge strane, predloženom se metodom dobivaju ne samo koeficijenti razmatranog polinoma već i koeficijenti karakterističnih polinoma nižih stupnjeva. Osim toga, iz predloženog algoritma izvode se svi koeficijenti polinoma karakteristični za sve matrice bilo kojeg reda koje se odnose na jednadžbu (2). Ta se baza podataka može koristiti bez ikakvih iteracija, a izbjegava se ponavljanje proračuna.

### 2.3. Vlastiti vektori

Svaka kružna frekvencija  $\omega_i$  ima pridruženi vlastiti vektor koji se izvodi iz jednadžbe (13):

$$[K] - \omega_i^2 [M] \{ \Phi_i \} = 0 \quad (13)$$

Primjenom istih veličina kao i kod jednadžbi (1), (3) i (5), jednadžba (13) poprima sljedeći oblik:

$$\left[ \begin{matrix} \bar{K} \\ -\alpha_i [I] \end{matrix} \right] \{\Phi_i\} = 0 \tag{14}$$

Za određivanje vlastitog vektora treba se koristiti niže opisano svojstvo trodijagonalne matrice:

$$P_n(\alpha) = \begin{vmatrix} (2-\alpha) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & (2-\alpha) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & (2-\alpha) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & (1-\alpha) \end{vmatrix}_{n \times n} \tag{15}$$

$$P_n(\alpha) = (2-\alpha) \begin{vmatrix} (2-\alpha) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & (2-\alpha) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & (2-\alpha) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & (1-\alpha) \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \tag{16}$$

$$-(-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2-\alpha) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & (2-\alpha) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & (1-\alpha) \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$P_n(\alpha) = (2-\alpha)P_{(n-1)} + (-1)P_{(n-2)} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2-\alpha) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (2-\alpha) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & (2-\alpha) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & (1-\alpha) \end{vmatrix} \tag{17}$$

Zadnja matrica iz jednadžbe (17) s nultim stupcem dovodi do ukidanja determinante. Primjenom odnosa prikazanog u jednadžbi (17), polinom  $P_n(\alpha)$  možemo iskazati kako slijedi:

$$P_n(\alpha) = \begin{cases} P_0(\alpha) = 1 \\ P_1(\alpha) = 1 - \alpha \\ P_n(\alpha) = (2-\alpha)P_{n-1}(\alpha) - P_{n-2}(\alpha) \quad n \geq 2 \end{cases} \tag{18}$$

Vlastiti vektor  $\{\Phi_i\}$  zadovoljava jednadžbu (14). Prikazan je i u obliku koji je iskazan u jednadžbi (19):

$$\begin{bmatrix} (2-\alpha_i) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & (2-\alpha_i) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & (2-\alpha_i) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & (2-\alpha_i) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & (2-\alpha_i) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & (1-\alpha_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{1j} \\ \phi_{2j} \\ \vdots \\ \phi_{n-(k+1)j} \\ \phi_{n-kj} \\ \phi_{n-(k-1)j} \\ \vdots \\ \phi_{n-1j} \\ \phi_{nj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{19}$$

Redci  $k$  i  $n$  iz jednadžbe (19) omogućuju izvođenje ta dva odnosa:

$$\begin{cases} \phi_{n-1,i} = (1-\alpha_i)\phi_{n,i} \\ \phi_{n-(k+1),i} = (2-\alpha_i)\phi_{n-k,i} - \phi_{n-(k-1),i} \quad k=1, \dots, n-2 \end{cases} \tag{20}$$

Kako bi se odredio vlastiti vektor, treba se zadati vrijednost bilo kojeg elementa vektora te izvođenjem definirati ostale elemente. Općenito uzevši, najčešće se pretpostavlja jedinična vrijednost tog elementa. Ako je  $\Phi_{n,i} = 1$ ; vrijednost  $\Phi_{n-1,i}$  dobiva se iz retka  $n$  iz jednadžbe (19) primjenom odnosa iskazanog u jednadžbi (18), i to kako slijedi:

$$\phi_{n-1,i} = (1-\alpha_i)\phi_{n,i} = P_1(\alpha_i) \tag{21}$$

Redak  $(n-1)$  iz jednadžbe (19) dovodi do  $\phi_{n-2,i}$  kao što je navedeno u jednadžbi (22):

$$\phi_{n-2,i} = (2-\alpha_i)\phi_{n-1,i} - \phi_{n,i} = (2-\alpha_i)P_1(\alpha_i) - P_0(\alpha_i) = P_2(\alpha_i) \tag{22}$$

Svi elementi se određuju sukcesivno, slijedeći isti način razmišljanja:

$$\phi_{n-2,i} = P_k(\alpha_i) \quad k=0, \dots, (n-1) \tag{23}$$

Stoga se odgovarajući vlastiti vektor građevine s "n" identičnih katova određuje za svaku vrijednost  $\alpha_i$ . Ustvari, zamjenom vrijednosti  $\alpha_i$  u polinomima koji se odnose na katove 1 do  $n-1$  lako se može dobiti odgovarajući vlastiti vektor, normiran na prvi element:

$$\{\Phi_i\} = [P_{n-1}(\alpha_i); P_{n-2}(\alpha_i); \dots; P_1(\alpha_i); 1]^T / P_{n-1}(\alpha_i) \tag{24}$$

### 2.4. Modalni koeficijenti doprinosa i faktori doprinosa modalnih masa

Modalni koeficijent doprinosa  $\Gamma_i$  definiran je u jednadžbi (25), prema [23]:

$$\Gamma_i = \frac{\{\Phi_i\}^T [M] \{1\}}{\{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_i\}} \tag{25}$$

Iz jednadžbe (25) očito je da modalni koeficijent doprinosa varira ovisno o normizaciji vlastitog oblika. Ako je  $\{\Phi_i\}_j$   $i$ -ti modalni oblik normiran na  $j$ -ti element, tada se odnos između vektora  $\{\Phi_i\}_j$  i  $\{\Phi_i\}_k$  iskazuje kako slijedi:

$$\{\Phi_i\}_j = (\Phi_{ki})_j \{\Phi_i\}_k \tag{26}$$

gdje je  $(\Phi_{ki})_j$ ,  $k$ -ti element  $i$ -tog vlastitog oblika normiranog na  $j$ -ti element. Jednadžba (28) dobiva se zamjenom izraza  $\{\Phi_i\}_j$  u jednadžbi (25):

$$(\Gamma_i)_j = \frac{1}{(\Phi_{ki})_j} \frac{\{\Phi_i\}_k^T [M] \{1\}}{\{\Phi_i\}_k^T [M] \{\Phi_i\}_k} \quad (27)$$

$$(\Gamma_i)_j = \frac{(\Gamma_i)_k}{(\Phi_{ki})_j} \quad (28)$$

$(\Gamma_i)_k$  je modalni koeficijent doprinosa i-tog oblika dobiven primjenom i-tog vlastitog oblika normiranog na k-ti element. Možemo zamijetiti da se modalni koeficijent doprinosa razlikuje od faktora doprinosa modalnih masa, tj. od omjera između i-te efektivne modalne mase  $(\bar{M}_i)$  i ukupne mase [23].

$$(\bar{M}_i) = \Gamma_i^2 \{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_i\} \quad (29)$$

Efektivna masa nezavisna je od normiranog vlastitog oblika, kako je iskazano u nastavku.  $(\bar{M}_i)$  je i-ta efektivna modalna masa dobivena primjenom  $\{\Phi_i\}_j$ , a to je i-ti vlastiti oblik normiran na j-ti element.

$$(\bar{M}_i)_j = (\Gamma_i)_j^2 \{\Phi_i\}_j^T [M] \{\Phi_i\}_j \quad (30)$$

Zamjenom jednadžbi (26) i (28) u odnosu na jednadžbu (30), dobivamo:

$$(\bar{M}_i)_j = (\Gamma_i)_k^2 \{\Phi_i\}_k^T [M] \{\Phi_i\}_k = (\bar{M}_i)_k \quad (31)$$

Iz jednadžbe (31) vidimo da su efektivna modalna masa i faktor doprinosa modalnih masa neovisni o normizaciji vlastitog oblika. Kako bi se povećala primjenljivost ovog pristupa, u radu se

analiziraju i dva dodatna slučaja čestih građevina. Radi se o građevinama kod kojih se bilo najviši ili najniži kat razlikuje od ostalih katova (poglavlja 3. i 4.).

### 3. Građevina kod koje se prvi kat razlikuje od ostalih katova

U ovom se slučaju svi katovi smatraju jednakim, osim najnižega. Za krutost i masu prvog kata koriste se oznake  $k_1$  i  $m_1$ , a za svaki viši kat krutost se označava sa  $k$ , a masa sa  $m$ . Za ovu vrstu građevine, koeficijenti polinoma izračunavaju se isto kao i kod građevina s identičnim katovima, tj. zamjenjuje se polje  $a_{11} = 1$  iz tablice 1. vrijednošću  $b = k/k_1$  iz odgovarajućeg polja u tablici 4., a sadržaj polja  $a_{22} = 1$  iz tablice 1. zamjenjuje se vrijednošću  $ab$  iz odgovarajućeg polja u tablici 4., gdje je  $a = m_1/m$ . Međutim, svi koeficijenti koji se odnose na polinome višeg reda  $P_n(\alpha)$  automatski se izvode iz prva dva retka iz tablice 4. Možemo zamijetiti da polinom ima izmjenične predznake. Tako dobiveni korijeni  $\alpha_i$  polinoma stupnja  $n$  omogućuju određivanje kružnih frekvencija  $\omega_i$  građevine s  $\omega_i^2 = \alpha_i \omega_0^2$ , a vlastiti vektor  $\{\Phi\}$  koji odgovara vrijednosti  $\alpha_i$  se zatim dobiva pomoću jednadžbe (24).

### 4. Građevina kod koje se najviši kat razlikuje od ostalih katova

U ovom se slučaju smatra da su svi katovi identični, osim najvišega kata. To znači da se vrijednosti krutosti  $k_n$  i mase  $m_n$  tog najvišeg kata razlikuju od odgovarajućih vrijednosti za druge katove ( $k$  i  $m$ ).

Tablica 4. Koeficijenti polinoma  $P_n(\alpha)$  za okvirnu AB građevinu u kojoj se prvi kat razlikuje od ostalih katova

Broj katova		Rast stupnja polinoma →				
0	b					$b = k/k_1$
1	1	ab				$a = m_1/m$
2	1	ab+b+1	ab			$\omega_0^2 = k/m$
3	1	ab+2b+3	3ab+b+1	ab		$\alpha = \omega^2/\omega_0^2$
4	1	ab+3b+6	6ab+4b+5	5ab+b+1	ab	
5	1	ab+4b+10	10ab+10b+15	15ab+6b+7	7ab+b+1	ab

Tablica 5. Koeficijenti polinoma  $P_n(\alpha)$  za okvirnu AB građevinu kod koje se najviši kat razlikuje od ostalih katova

Broj katova		Rast stupnja polinoma →				
0	a'					$b' = k/k_n$
1	1	a'b'				$\omega_0^2 = k/m$
2	1	a'b'+a'+1	a'b'			$a' = m_n/m$
3	1	a'b'+2a'+3	3a'b'+a'+1	a'b'		$\alpha = \omega^2/\omega_0^2$
4	1	a'b'+3a'+6	6a'b'+4a'+5	5a'b'+a'+1	a'b'	
5	1	a'b'+4a'+10	10a'b'+10a'+15	15a'b'+6a'+7	7a'b'+a'+1	a'b'

Postupak za određivanje koeficijenta polinoma  $P_n(\alpha)$  odgovara postupku koji je objašnjen u točki 3. U ovom se slučaju konstanta (b) treba zamijeniti s (a'), a (a) s (b'), gdje je  $a' = m_n/m$ , a  $b' = k/k_n$ . Možemo zamijetiti da polinom ima izmjenične predznake. Kružne frekvencije i vlastiti vektori određuju se na način objašnjen u točki 3.

### 5. Oblici titranja okvirnih AB građevina s identičnim katovima

Analizira se slučaj građevine s identičnim katovima. Određene su sve prirodne kružne frekvencije, modalni koeficijenti doprinosa (skraćeno, MKD), faktori doprinosa modalnih masa (skraćeno, FDMM) i vlastiti vektori. Ti su parametri izračunani za devet građevina visine od dva do deset katova. Analizom se može obuhvatiti i veći broj katova (više od deset). Vlastiti vektori i modalni koeficijenti doprinosa neovisni su o krutosti i masi, ali ovise o omjeru karakteristika (k i m) za dva uzastopna kata. Rezultati su prikazani u tablicama 6. i 7. Kako bi se izbjeglo ponavljanje istog proračunskog postupka, ova se baza podataka može istraživati izravno iz tablica 6. i 7. ili se može izraditi računalni potprogram. Vrijednosti faktora doprinosa modalnih masa prikazane u tablicama 6. i 7. u skladu su s rezultatima koje su dobili Palermo i dr. [24]. Ustvari, vrijednost FDMM koja odgovara prvom obliku nalazi se unutar intervala [0,82; 0,88] koji se odnosi na petokatnice i više građevine. Osim toga, zbroj MMPP izveden iz prva tri oblika titranja veći je od 90 %.

### 6. Rezultati i rasprava

#### 6.1. Slučaj okvirnih AB građevina s identičnim katovima

##### 6.1.1. Kružne frekvencije

Obavljena je usporedba s postojećom metodom kako bi se potvrdila valjanost predložene metode. Metoda za usporedbu je Jacobijeva metoda koju je naknadno revidirao i preradio Hochstenbach [8]. Ta metoda omogućuje određivanje vlastitih

oblika titranja iteracijskim postupkom koji se temelji na dijagonalizaciji matrica krutosti i mase. Za svaku iteraciju, matrica koja nosi oznaku  $[Q^k]$  omogućuje eliminaciju elemenata matrice  $k_{ij}^{k+1}$  i  $m_{ij}^{k+1}$  kako slijedi:

$$[K^{(k+1)}] = [Q^k]^T [K^k] [Q^k]; [M^{(k+1)}] = [Q^k]^T [M^k] [Q^k] \quad (32)$$

gdje vrijednost  $[Q^k]$  ima sljedeći oblik:

$$[Q^k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \mathbf{a} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ \\ \\ j \\ \\ j \end{matrix} \quad (33)$$

Konstante "a" i "b" određuju se tako da se vrijednost nula istovremeno primijeni na  $k_{ij}^{k+1}$  i  $m_{ij}^{k+1}$  (vidi jednadžbu (34)):

$$\begin{cases} a = -\frac{(k_{ii}m_{jj} - m_{ii}k_{jj}) - \sqrt{(k_{ii}m_{jj} - m_{ii}k_{jj})^2 + 4(k_{ii}m_{ij} - m_{ii}k_{ij})(k_{jj}m_{ij} - m_{jj}k_{ij})}}{2(k_{ii}m_{ij} - m_{ii}k_{ij})} \\ b = \frac{(k_{ii}m_{ij} - m_{ii}k_{ij}) - \sqrt{(k_{ii}m_{ij} - m_{ii}k_{ij})^2 + 4(k_{ii}m_{ij} - m_{ii}k_{ij})(k_{jj}m_{ij} - m_{jj}k_{ij})}}{2(k_{jj}m_{ij} - m_{jj}k_{ij})} \end{cases} \quad (34)$$

Nakon svake iteracije, dodatni dijagonalni elementi se uspoređuju međusobno i sa zadanom točnošću i za to se koristi izraz:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{|k_{ij}|}{\sqrt{k_{ii}k_{jj}}} \leq 10^{-p} \quad (35)$$

Elementi  $k_{ij}$  i  $m_{ij}$ , koji se eliminiraju u sljedećoj iteraciji, odgovaraju maksimalnoj vrijednosti  $\varepsilon_{ij}$ . Treba napomenuti da tražena točnost Jacobijevine metode ovisi o vrijednosti p.

Nakon dijagonalizacije matrica krutosti i mase, određuju se pulsacije pomoću  $\omega_i^2 = k_{ii}^d / m_{ii}^d$ , gdje su  $k_{ii}^d$  i  $m_{ii}^d$  elementi krutosti i mase dijagonaliziranih matrica. Matrica vlastitih vektora  $[\phi]$  dobiva se pomoću:

Tablica 6. Oblici titranja za okvirne AB građevine s dva do sedam identičnih katova

Broj katova	2		3			4			
MFD	0,7236	0,2764	0,5432	0,3492	0,1076	0,4307	0,3333	0,1840	0,0520
FDMM [%]	94,72	5,28	91,41	7,49	1,10	89,34	8,33	1,96	0,37
$(\omega_i/\omega_0)^2$	0,3820	2,6180	0,19810	1,5550	3,2470	0,1206	1,0000	2,3473	3,5321
Vlastiti vektor	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	1,6179	-0,6180	1,8020	0,4450	-1,2470	1,8793	1,0000	-0,3473	-1,5321
			2,2471	-0,8019	0,5550	2,5319	0,0000	-0,8794	1,3473
					2,8792	-1,0000	0,6527	-0,5321	

MFD - modalni faktor doprinosa, FDMM - faktor doprinosa modalnih masa

Tablica 6. Oblici titranja za okvirne AB građevine s dva do sedam identičnih katova - nastavak

Broj katova	5						
MFD	0,3563	0,3007	0,208	0,1062	0,0288		
FDMM [%]	87,95	8,72	2,42	0,75	0,16		
$(\omega_i/\omega_0)^2$	0,0810	0,6903	1,7154	2,8308	3,6825		
Vlastiti vektor	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		
	1,9188	1,3097	0,2846	-0,8308	-1,6825		
	2,6823	0,7153	-0,9190	-0,3097	1,8308		
	3,2284	-0,3728	-0,5462	1,0882	-1,3979		
	3,5130	-1,2036	0,7635	-0,5944	0,5211		
Broj katova	6						
MFD	0,3032	0,2690	0,2082	0,1353	0,0667	0,0176	
FDMM [%]	86,96	8,91	2,69	1,01	0,35	0,08	
$(\omega_i/\omega_0)^2$	0,0581	0,5030	1,2908	2,2411	3,1361	3,7710	
Vlastiti vektor	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
	1,9421	1,4970	0,7092	-0,2411	-1,1361	-1,7709	
	2,7713	1,2410	-0,4970	-0,9419	0,2908	2,1361	
	3,4394	0,3609	-1,0617	0,4681	0,8058	-2,0120	
	3,9077	-0,7008	-0,2560	0,8290	-1,2062	1,4269	
	4,1488	-1,4100	0,8802	-0,6680	0,5647	-0,5150	
Broj katova	7						
MFD	0,2638	0,2412	0,2000	0,1471	0,0921	0,0443	0,0115
FDMM [%]	86,21	9,02	2,86	1,18	0,50	0,19	0,04
$(\omega_i/\omega_0)^2$	0,04371	0,38197	1,00000	1,79095	2,61803	3,33827	3,82709
Vlastiti vektor	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	1,9563	1,6181	1,0000	0,2091	-0,6180	-1,3382	-1,8271
	2,8271	1,6181	0,0000	-0,9563	-0,6180	0,7909	2,3383
	3,5744	1,0000	-1,0000	-0,4090	1,0000	0,2798	-2,4452
	4,1654	0,0000	-1,0000	0,8708	-0,0000	-1,1653	2,1292
	4,5744	-1,0000	0,0000	0,5910	-1,0000	1,2798	-1,4452
	4,7835	-1,6181	1,0000	-0,7472	0,6180	-0,5473	0,5112

Tablica 7. Oblici titranja za okvirne AB građevine s osam do deset identičnih katova

Broj katova	8							
MFD	0,2339	0,2177	0,1884	0,1499	0,1067	0,065	0,0306	0,0078
FDMM [%]	85,63	9,08	2,97	1,29	0,61	0,28	0,11	0,03
$(\omega_i/\omega_0)^2$	0,0341	0,2996	0,7947	1,4527	2,1845	2,8915	3,4780	3,8645
Vlastiti vektor	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	1,9660	1,7004	1,2053	0,5473	-0,1846	-0,8915	-1,4780	-1,8650
	2,8650	1,8913	0,4527	-0,7004	-0,9659	-0,2053	1,1845	2,4780
	3,6665	1,5158	-0,6597	-0,9307	0,3628	1,0745	-0,2727	-2,7565
	4,3431	0,6861	-1,2478	0,1910	0,8990	-0,7526	-0,7814	2,6626
	4,8718	-0,3490	-0,8442	1,0353	-0,5287	-0,4036	1,4277	-2,2091
	5,2346	-1,2797	0,2303	0,3756	-0,8014	1,1123	-1,3287	1,4573
	5,4191	-1,8269	1,1217	-0,8297	0,6766	-0,5881	0,5362	-0,5087



Tablica 7. Oblici titranja za okvirne AB građevine s osam do deset identičnih katova - nastavak

Broj katova	9									
MFD	0,2090	0,1979	0,1765	0,1476	0,114	0,0795	0,0476	0,0222	0,0057	
FDMM [%]	85,17	9,12	3,04	1,37	0,69	0,35	0,17	0,07	0,02	
$(\omega_i/\omega_0)^2$	0,0273	0,2411	0,6454	1,1966	1,8348	2,4910	3,0939	3,5783	3,8916	
Vlastiti vektor	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	1,9727	1,7589	1,3545	0,8034	0,1652	-0,4910	-1,0939	-1,5783	-1,8916	
	2,8915	2,0938	0,8348	-0,3546	-0,9727	-0,7589	0,1966	1,4910	2,5782	
	3,7315	1,9240	-0,2237	-1,0882	-0,3258	0,8636	0,8788	-0,7749	-2,9855	
	4,4697	1,2904	-1,1379	-0,5197	0,9189	0,3349	-1,1579	-0,2680	3,0692	
	5,0859	0,3458	-1,3176	0,6707	0,4776	-1,0280	0,3878	1,1978	-2,8203	
	5,5635	-0,6822	-0,6469	1,0586	-0,8400	0,1698	0,7337	-1,6226	2,2658	
	5,8893	-1,5458	0,4413	0,1797	-0,6163	0,9447	-1,1904	1,3630	-1,4658	
6,0544	-2,0367	1,2447	-0,9142	0,7382	-0,6336	0,5685	-0,5286	0,5069		
Broj katova	10									
MFD	0,1894	0,1810	0,1651	0,1429	0,1164	0,0885	0,0601	0,0359	0,0165	0,0042
FDMM [%]	84,79	9,14	3,09	1,43	0,75	0,41	0,22	0,11	0,05	0,01
$(\omega_i/\omega_0)^2$	0,0223	0,1981	0,5339	1,0000	1,5550	2,1495	2,7307	3,2470	3,6525	3,9112
Vlastiti vektor	1,0000	1,0000	1,0000	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	1,9773	1,8019	1,4661	1	0,4451	0,1495	-0,7307	-1,2470	-1,6525	-1,9111
	2,9105	2,2469	1,1495	0	-0,8019	-0,9777	-0,4661	0,5550	1,7307	2,6524
	3,7787	2,2469	0,2192	-1	-0,8019	0,2956	1,0713	0,5550	-1,2074	-3,1581
	4,5624	1,8018	-0,8282	-1	0,4450	0,9335	-0,3167	-1,2470	0,2646	3,3831
	5,2443	1,0000	-1,4334	0	1,0000	-0,4351	-0,8399	1,0000	0,7702	-3,3075
	5,8090	-0,0000	-1,2733	1	0,0000	-0,8685	0,9303	0,0000	-1,5373	2,9381
	6,2440	-1,0000	-0,4334	1	-1,0000	0,5649	0,1601	-1,0000	1,7702	-2,3075
	6,5394	-1,8019	0,6379	0	-0,4450	0,7840	-1,0473	1,2470	-1,3879	1,4720
	6,6888	-2,2469	1,3686	-1	0,8019	-0,6821	0,6052	-0,5550	0,5232	-0,5056

$$[\phi] = [Q^1] \times \dots \times [Q^n] \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \sqrt{m_{11}^d} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{m_{nn}^d} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Ovdje se analizira primjer građevine s četiri identična kata. Rezultati su sažeto prikazani u tablici 8. Prema rezultatima koji su iskazani u tablici 8., usporedbom kružnih frekvencija dviju metoda utvrđena je dobra podudarnost rezultata.

### 6.1.2. Vlastiti vektori

Za isti su primjer vrijednosti vlastitih vektora također uspoređene s vrijednostima koje su određene Jacobijevom metodom (tablica 9.) i tom je prilikom ustanovljena vrlo visoka točnost. Niža točnost iznosila je 99,835 %.

### 6.1.3. Usporedba osnovnih kružnih frekvencija za građevine s dva do pet katova

Osnovne kružne frekvencije, označene sa  $\omega_i$ , građevina s dva do pet katova, uspoređene su s kružnim frekvencijama koje su dobivene Jacobijevom metodom. Rezultati ove analize prikazani su u tablici 10.

Tablica 8. Primjer građevine s četiri identična kata - kružna frekvencija.

Oblik titranja	$(\omega_i/\omega_0)^2$		Točnost [%]
	Predložena metoda	Jacobijeva metoda	
1	0,12061	0,12061	100,00
2	1,00000	1,00000	100,00
3	2,34730	2,34734	99,998
4	3,53209	3,53205	99,999

Tablica 9. Primjer građevine s četiri identična kata - vlastiti vektor

Predložena metoda	Jacobijeva metoda	Točnost [%]
$\{\Phi_1\}$	$\{\Phi_1\}$	
1,00000	1,00000	100,000
1,87939	1,87962	99,988
2,53210	2,53218	99,997
2,87939	2,87962	99,992
$\{\Phi_2\}$	$\{\Phi_2\}$	
1,00000	1,00000	100,000
1,00000	0,99968	99,968
0,00001	-0,00021	-
-1,00000	-0,99961	99,961
$\{\Phi_3\}$	$\{\Phi_3\}$	
1,00000	1,00000	100,000
-0,34730	-0,34754	99,931
-0,87939	-0,87954	99,983
0,65270	0,65301	99,953
$\{\Phi_4\}$	$\{\Phi_4\}$	
1,00000	1,00000	100,000
-1,53290	-1,53202	99,943
1,34730	1,34732	99,999
-0,53290	-0,53202	99,835

Tablica 10. Usporedba osnovnih kružnih frekvencija

Broj katova	$(\omega_i/\omega_0)^2$		Točnost [%]
	Predložena metoda	Jacobijeva metoda	
2	0,38197	0,38197	100,00
3	0,19806	0,19806	100,00
4	0,12061	0,12061	100,00
5	0,08101	0,08102	99,99

Još jednom se vidi da niža vrijednost točnosti iznosi 99,99 %, što potvrđuje valjanost metode.

### 6.2. Slučaj okvirnih AB građevina kod kojih se najniži kat razlikuje od ostalih katova

#### 6.2.1. Osnovne kružne frekvencije

Ovdje se razmatraju primjeri građevina s 2, 3, 4 i 5 katova. U ovom slučaju vrijednosti krutosti i mase prvog kata označene su sa  $k_1$

i  $m_1$ , dok se oznake  $k$  i  $m$  koriste za gornje katove. Konstante "a" i "b" iznose  $m_1/m$  i  $k/k_1$ . Kako bi se provjerila valjanost metoda, analiziran je primjer s  $a = 1,25$  i  $b = 0,9$ . Odgovarajući koeficijenti polinoma  $P_n(\alpha)$  prikazani su u tablici 11.

Tablica 11. Koeficijenti polinoma za okvirnu AB građevinu u kojoj se najniži kat razlikuje od ostalih katova, slučaj  $a = 1,25$ ;  $b = 0,9$

Broj katova	Rast stupnja polinoma					
	0	0,9				
1	1	1,125				
2	1	3,025	1,125			
3	1	5,925	5,275	1,125		
4	1	9,825	15,35	7,525	1,125	
5	1	14,725	35,25	29,275	9,775	1,125

Nakon što su određeni korijeni polinoma i izvedene osnovne kružne frekvencije, te su kružne frekvencije uspoređene s frekvencijama dobivenima pomoću Jacobijeve metode. Rezultati ove usporedbe prikazani su u tablici 12.

Rezultati ove usporedbe još jednom pokazuju valjanost metode.

Tablica 12. Usporedba osnovnih kružnih frekvencija okvirnih AB građevina u kojima se najniži kat razlikuje od ostalih katova: slučaj  $a = 1,25$ ;  $b = 0,9$

Broj katova	$(\omega_i/\omega_0)^2$		Točnost [%]
	Predložena metoda	Jacobijeva metoda	
2	0,38599	0,38599	100,00
3	0,20433	0,20433	100,00
4	0,12457	0,12467	99,92
5	0,08346	0,08347	99,99

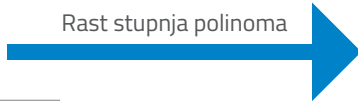
### 6.3. Slučaj okvirnih AB građevina kod kojih se najviši kat razlikuje od ostalih katova

#### 6.3.1. Osnovne kružne frekvencije

Ovdje se analiziraju primjeri građevina s 2, 3, 4 i 5 katova. U ovom slučaju, vrijednosti krutosti i mase najvišeg kata označene su sa  $k_n$  i  $m_n$ , dok se oznake  $k$  i  $m$  koriste za niže katove. Konstante  $a'$  i  $b'$  iznose  $m_n/m$  i  $k/k_n$ . Za usporedbu je analiziran primjer s  $a' = 0,20$  i  $b' = 4$ . Odgovarajući koeficijenti polinoma  $P_n(\alpha)$  prikazani su u tablici 13.

Nakon što su određeni korijeni polinoma i osnovne kružne frekvencije, te su frekvencije uspoređene s vrijednostima dobivenima Jacobijevom metodom za građevine od dva do pet katova. Rezultati su prikazani u tablici 14. Ti rezultati upućuju na točnost predložene metode.

**Tablica 13. Koeficijenti polinoma za okvirnu AB građevinu kod koje se najviši kat razlikuje od ostalih katova, slučaj  $a' = 0,20$ ;  $b' = 4$**

Broj katova	Rast stupnja polinoma 					
0	0,2					
1	1	0,8				
2	1	2	0,8			
3	1	4,2	3,6	0,8		
4	1	7,4	10,6	5,2	0,8	
5	1	11,6	25	20,2	6,8	0,8

**Tablica 14. Usporedba osnovnih kružnih frekvencija okvirnih AB građevina u kojima se najviši kat razlikuje od ostalih katova: slučaj  $a' = 0,20$  i  $b' = 4$**

Broj katova	$(\omega_i/\omega_0)^2$		Točnost [%]
	Predložena metoda	Jacobijeva metoda	
2	0,69098	0,69098	100,00
3	0,31927	0,31927	100,00
4	0,17560	0,17599	99,78
5	0,11009	0,11093	99,24

## 7. Zaključak

Metoda razvijena u ovom radu omogućuje jednostavno određivanje svih prirodnih oblika titranja za tri vrste okvirnih AB građevina (građevine s identičnim katovima, građevine u kojoj se najniži kat razlikuje od ostalih katova i građevine u kojoj se najviši kat razlikuje od ostalih katova). Rezultati dobiveni primjenom predložene metode uspoređeni su s rezultatima dobivenima pomoću Jacobijeve metode. Usporedbom metoda ustanovljeno je da je postignuta izuzetno zadovoljavajuća razina točnosti. To upućuje na djelotvornost predložene metode, koju karakterizira visok stupanj jednostavnosti. Proračun je najprije proveden za građevine s dva do deset identičnih katova, a zaključak je iskazan pomoću tablice u kojoj su grupirani svi prirodni oblici titranja. Ta se tablica može izravno koristiti za dinamičku analizu konstrukcija te unijeti u aneks propisa za seizmičko projektiranje građevina. Primjenom predloženog postupka, konstruktori izbjegavaju nepotrebno podvostručivanje proračuna za ovu vrstu građevina. Kako bi se dodatno proširilo područje primjene ove metode, analizirana su i dva dodatna slučaja koji se najčešće susreću u praksi. Radi se o građevinama kod kojih se najniži ili najviši kat razlikuje od ostalih katova.

Istaknuta je važnost postupak za dobivanje svih koeficijenata polinoma  $P_n(\alpha)$  za tri gore spomenute vrste okvirnih AB građevina. Nakon određivanja korijena tog polinoma, vlastiti vektori se mogu jednostavno izvesti kako je prikazano u jednadžbi (24). Još jedan znanstveni doprinos ovog istraživanja, ali u području matematike, omogućuje određivanje koeficijenata karakterističnog polinoma određene trodijagonalne matrice.

## LITERATURA

- [1] Salama, M.I.: Estimation of period of vibration for concrete moment-resisting frame buildings, HBRC Journal, 11 (2015), pp. 11-21, <https://doi.org/10.1016/j.hbrj.2014.01.006>
- [2] Kim, J., Collins, K.R., Lim, Y.M.: An approximate formula to calculate the fundamental period of a fixed-free mass-spring system with varying mass and stiffness, Struc Eng and Mech, 25 (2007), pp. 717-732, <https://doi.org/10.12989/sem.2007.25.6.717>
- [3] Joshi, S.G., Londhe, S.N., Kwatra, N.: Determination of natural periods of vibration using genetic programming, Earthq Struc, 6 (2014), pp. 201-216, <https://doi.org/10.12989/eas.2014.6.2.201>
- [4] Sofi, M., Hutchinson, G.L., Duffield, C.: Review of Techniques for Predicting the Fundamental Period of Multi-Storey Buildings-Effects of Non structural Components, Int J Str Stab Dyn, 15 (2015) 2, <https://doi.org/10.1142/S0219455414500394>
- [5] Maglajlić, Z., Simonović, G.: Approximation procedure for determining oscillation period of frame structures, GRAĐEVINAR, 59 (2007) 8, pp. 685-691.
- [6] Ricci, P., Verderame, G.M., Manfredi, G.: Analytical investigation of elastic period of infilled RC MRF buildings, Eng Struc, 33 (2011), pp. 308-319, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.10.009>
- [7] Malekinejad, M., Rahgozar, R.: A simple analytic method for computing the natural frequencies and mode shapes of tall buildings, Appl Math Modelling, 36 (2012), pp. 3419-343, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.10.018>
- [8] Hochstenbach, M.E.: A Jacobi-Davidson type method for the generalized singular value problem, Linear Algebra and its Applications, 431 (2009), pp. 471-487, <https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.03.003>
- [9] Golub, G.H., Van Loan, C.F.: Matrix Computations, 3<sup>rd</sup> ed., The John Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, USA, 1996.
- [10] Arnoldi, W.E.: The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenvalue problem, Quart Appl Math, 9 (1951), pp. 17-29, <https://doi.org/10.1090/qam/42792>
- [11] Saad, Y.: Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems, Manchester University Press, Manchester, UK, 1992.
- [12] Davidson, E.R.: The iterative calculation of a few of the lowest eigenvalues and corresponding eigenvectors of large real-symmetric matrices, J Comput Phys, 17 (1975), pp. 87-94, [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(75\)90065-0](https://doi.org/10.1016/0021-9991(75)90065-0)
- [13] Crouzeix, M., Philippe, B., Sadkane, M.: The Davidson method, SIAM J Sci Comput 15 (1994), pp. 62-76, <https://doi.org/10.1137/0915004>

- [14] Morgan, R.B., Scott, D.S.: Preconditioning the Lanczos algorithm for sparse symmetric eigenvalue problems, *SIAM J Sci Comput*, 14 (1993), pp. 585-593, <https://doi.org/10.1137/0914037>
- [15] Verderame, G.M., Iervolino, I., Manfredi, G.: Elastic period of sub-standard reinforced concrete moment resisting frame buildings, *Bull Earth Eng*, 8 (2010), pp. 955-972, <https://doi.org/10.1007/s10518-010-9176-8>
- [16] Oliveira, C.S., Navarro, M.: Fundamental periods of vibration of RC buildings in Portugal from in-situ experimental and numerical technique, *Bull Earth Eng*, 8 (2010), pp. 609-642, <https://doi.org/10.1007/s10518-009-9162-1>
- [17] Tong, W., Lingmi, Z., Fah, T.K.: Extraction of real modes and physical matrices from modal testing, *Earthq Eng & Eng Vib*, 10 (2011), pp. 219-227, <https://doi.org/10.1007/s11803-011-0060-6>
- [18] Buchholzer, H., Kanzow, C.: Bounds for the extremal eigenvalues of a class of symmetric tridiagonal matrices with applications, *Linear Algebra Appl*, 436 (2012), pp. 1837-1849, <https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.10.013>
- [19] Jia, J., Sogabe, T., El-Mikkawy, M.: Inversion of k-tridiagonal matrices with Toeplitz structure, *Comput Math Appl*, 65 (2013), pp. 116-125, <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2012.11.001>
- [20] Hou-Biao, L., Ting-Zhu, H., Xing-Ping, L., Hong, L.: On the inverses of general tridiagonal matrices, *Linear Algebra and its Applications*, 433 (2010), pp. 965-983, <https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.04.042>
- [21] Akritas, A.G., Strzeboński, A.W., Vigklas, P.S.: Improving the performance of the continued fractions method using new bounds of positive roots, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 13 (2008), pp. 265-279.
- [22] Givens, W.: Numerical computation of the characteristic values of a real symmetric matrix, tech. rep., Oak Ridge National Laboratory, 1953.
- [23] Clough, R.W., Penzien, P.: *Dynamics of Structure*, McGraw-Hill, New York, USA, 1975.
- [24] Trombetti, T., Palermo, M., Silvestri, S., Gasparini, G., Trombetti, T.: Seismic Modal Contribution Factors, *Bull Earth Eng*, 13 (2015), pp. 1573-1456.