

Primljen / Received: 7.11.2017.

Ispravljen / Corrected: 18.1.2019.

Prihvaćen / Accepted: 20.2.2019.

Dostupno online / Available online: 10.3.2020.

# Elastoplastični konstitutivni model zrnatog tla temeljen na hiperboličnoj plohi sloma

## Autori:

Doc.dr.sc. **Dragan Rakić**, dipl.ing.građ.

Sveučilište u Kragujevcu, Srbija

Fakultet inženjerskih znanosti

[drakic@kg.ac.rs](mailto:drakic@kg.ac.rs)

Autor za korespondenciju

Prof.dr.sc. **Miroslav Živković**, dipl.ing.stroj.

Sveučilište u Kragujevcu, Srbija

Fakultet inženjerskih znanosti

[miroslav.zivkovic@kg.ac.rs](mailto:miroslav.zivkovic@kg.ac.rs)

Prethodno priopćenje

**Dragan Rakić, Miroslav Živković**

## Elastoplastični konstitutivni model zrnatog tla temeljen na hiperboličnoj plohi sloma

U radu se prikazuje numerički postupak za razvoj i primjenu novog elastoplastičnog konstitutivnog modela za nekoherentne zrnate materijale. Prikazani model temelji se na hiperboličnoj anvelopi sloma koja je razvijena primjenom teorije inkrementalne plastičnosti. Metoda vodećeg parametra (eng. governing parameter method - GPM) koristi se za implicitno integriranje konstitutivnih odnosa. Razvijeni algoritam unesen je u računalni program konačnih elemenata PAK koji se koristi za statičke, dinamičke, linearne i nelinearne analize. Model je verificiran i provjeren kroz numeričke simulacije troosnog pokusa i pokusa izravnog smicanja.

### Ključne riječi:

hiperbolični model tla, konstitutivno modeliranje, zrnato tlo, inkrementalna plastičnost, metoda vodećeg parametra

Research Paper

**Dragan Rakić, Miroslav Živković**

## Elastoplastic constitutive model for granular soil based on hyperbolic failure surface

Numerical procedure for the development and implementation of a new elastoplastic constitutive model for cohesionless granular materials is presented in the paper. The presented model is based on the hyperbolic failure envelope developed using the theory of incremental plasticity. The governing parameter method (GPM) is used for implicit integration of constitutive relations. The developed algorithm is implemented in the general-purpose finite element program PAK designed for the static, dynamic, linear and non-linear analysis. The model is calibrated and verified through numerical simulation of triaxial test and direct shear test.

### Key words:

hyperbolic soil model, constitutive modelling, granular soil, incremental plasticity, governing parameter method

Vorherige Mitteilung

**Dragan Rakić, Miroslav Živković**

## Elastoplastisches konstitutives Modell von körnigem Boden basierend auf der hyperbolischen Bruchebene

Die Abhandlung präsentiert ein numerisches Verfahren für die Entwicklung und Anwendung eines neuen elastoplastischen konstitutiven Modells für inkohärente körnige Materialien. Das dargestellte Modell basiert auf der hyperbolischen Grenzbedingung, die unter Verwendung der inkrementellen Plastizität entwickelt wurde. Die maßgebliche Parametermethode (eng. governing parameter method - GPM) wird verwendet, um konstituierende Beziehungen implizit zu integrieren. Der entwickelte Algorithmus wird in das Computerprogramm der Finite-Elemente PAK eingegeben, das für dynamische, lineare und nicht lineare Analysen verwendet wird. Das Modell wurde durch numerische Simulationen der dreiachsigen und direkten Scherexperimente verifiziert und überprüft.

### Schlüsselwörter:

hyperbolisches Bodenmodell, konstitutives Modellieren, körniger Boden, inkrementelle Plastizität, maßgebliche Parametermethode

## 1. Uvod

U numeričkim analizama geotehničkih problema ključno je odabrati odgovarajući konstitutivni model kojim se opisuje mehaničko ponašanje analiziranog materijala. Nakon usvajanja konstitutivnog modela, trebaju se odrediti njegovi parametri. U praktičnoj geotehnici prikladno je koristiti parametre materijala koji se određuju pomoću konvencionalnih postupaka za ispitivanje materijala. Osim toga, poželjno je jasno definirati fizikalne značajke parametara konstitutivnog modela. Kako bi se uključili prethodno definirani kriteriji, razvijen je novi konstitutivni model za nekoherentna tla, temeljen na hiperboličnoj plohi sloma. Granična ploha predloženog konstitutivnog modela predstavlja plohu kao funkciju stanja naprezanja temeljenu na Mohr-Coulombovoj anvelopi sloma [1], što rezultira realnijim opisom mehaničkog ponašanja zrnatog materijala u odnosu na modele koji koriste linearnu graničnu plohu.

Odnos naprezanja i deformacija pri slomu, iskazan kroz linearnu ovisnost, predstavlja najjednostavniju empirijsku aproksimaciju kompleksnog mehanizma kojim se definira međusobni utjecaj zrna različite veličine, oblika i mineralnog sastava [2]. Međutim, posmična otpornost je složena pojava u kojoj se osim trenja aktiviraju i neki drugi mehanizmi [1, 3]. U literaturi se mogu naći brojni prijedlozi za opis anvelope sloma u funkciji efektivnih naprezanja. Oni se mogu podijeliti na parabolične, logaritamske i hiperbolične izraze [4-7]. Većina tih izraza ima neke nedostatke kao što su valjanost u prilično ograničenom rasponu naprezanja, ovisnost parametara o jedinici naprezanja, nepostojanje asimptote anvelope sloma, nedostatak jasnog fizikalnog značenja parametara modela itd. Stoga anvelopa sloma treba zadovoljiti sljedeće uvjete: treba biti primjenljiva u čitavom rasponu mogućih naprezanja, treba se moći koristiti za nekoliko vrsta tla, treba imati parametre s jasno određenim fizikalnim značenjem, te treba biti u skladu s osnovnim postavkama usvojene teorije.

S druge strane, pri implementaciji modela konačnih elemenata, integriranje naprezanja provodi se za svaku točku integracije elementa, pa zato proračunski algoritam treba biti djelotvoran. Općenito uzevši, potreban je robustan algoritam koji omogućuje postizanje pouzdanih rezultata u svim mogućim slučajevima opterećenja.

Eksperimentalna istraživanja tla pokazuju da se linearna anvelopa sloma može koristiti kao prihvatljiva aproksimacija u relativno širokom rasponu efektivnih naprezanja za neke vrste tla, primjerice za rastresiti pijesak. Linearna anvelopa sloma, kao Mohr-Coulombova i Drucker-Pragerova anvelopa sloma [8, 9], često se koristi zbog svoje jednostavnosti te zbog relativno jednostavnog definiranja parametara modela. Mogućnosti tih modela ograničene su u stanju prije sloma, a naročito u slučajevima kada se bitno mijenja razina naprezanja, ili kada bitno varira trag naprezanja [10]. Međutim, kod anvelope sloma za zbijene materijale, vrijednost  $c$  na osi  $\tau$  dobiva se ekstrapolacijom, što predstavlja komponentu čvrstoće materijala koja ne obuhvaća trenje. Kako je nekoherentno tlo

skup necementiranih čestica, tlo u nedostatku normalnog naprezanja nema posmičnu čvrstoću i ne može preuzeti efektivno vlačno naprezanje. U tom slučaju ne postoji kohezija kao vrijednost posmične čvrstoće pri nultoj razini deformacije, već je ona posljedica linearne aproksimacije anvelope sloma.

Jedan od modela u kojima se eliminira nedostatak linearne anvelope sloma jest Duncan-Changov model [11]. Taj se model temelji na ideji da se krivulja odnosa naprezanja i deformacija u dreniranom troosnom pokusu može aproksimirati hiperbolom [12], te na postavci da se krutost tla može formulirati kao parametar ovisan o naprezanju prema zakonu potencije [13]. Slom u Duncan-Changovom modelu opisan je pomoću Mohr-Coulombovog kriterija sloma, ali to nije prikladno formulirano u okvirima plastičnosti. Iz toga proizlazi da ovaj model ne može opisati dilataciju jer je za to potreban Poissonov koeficijent veći od 0,5, što teoretski nije prihvatljivo [10].

Predloženim konstitutivnim modelom uklanjaju se spomenuti nedostaci često korištenih konstitutivnih modela tla jer se njime na prikladan način opisuje ponašanje zrnatih materijala u slučaju značajne promjene normalne razine naprezanja, te zato što nema kohezije kao posljedice linearne aproksimacije površine sloma. Osim toga, parametri predloženog modela imaju jasnu fizikalnu određenost i mogu se jednostavno odrediti pomoću uobičajenih metoda za ispitivanje materijala. Potrebno je napomenuti da razvijeni model ne posjeduje svojstvo očvršćivanja, kao ni prethodno navedeni modeli.

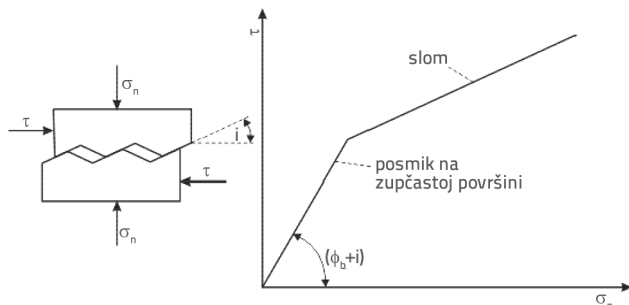
Kako bi se izračunalo naprezanje, razvijen je i primijenjen algoritam za implicitnu integraciju naprezanja, i to na bazi teorije inkrementalne plastičnosti [14, 15] i metode vodećeg parametra (eng. governing parameter method) [16]. Ova je metoda generalizacija metode radialnog povrata (eng. radial return method) koja se primjenjuje za određivanje opće plastičnosti [17], a temelji se na svođenju proračuna nepoznatih naprezanja i unutarnjih varijabli materijala na određivanje jednog (vodećeg) parametra [18-21].

Za implicitnu integraciju naprezanja korišten je algoritam povratnog preslikavanja (eng. return mapping) [22-24]. Metodom implicitne integracije ostvaruje se uvjet popuštanja u svakom vremenskom koraku, čime se izbjegava odstupanje od plohe sloma. Isto tako, metode implicitne integracije omogućuju znatno veći vremenski korak nego što je to slučaj kod eksplicitne integracije, pa se tako brže dolazi do rješenja [25]. Treba napomenuti da se implicitne metode vrlo često primjenjuju u rješavanju geotehničkih problema [26] te ostalih elastoplastičnih i viskoplastičnih problema [27].

## 2. Formulacija konstitutivnog modela

Primjena konstitutivnog modela temeljenog na anvelopi linearnog sloma dovoljno je precizna za numeričku simulaciju mehaničkog ponašanja zrnatog materijala pri višim vrijednostima normalnog naprezanja. Međutim, kod nižih vrijednosti normalnog naprezanja, anvelopa linearnog sloma ne odražava stvarno mehaničko ponašanje zrnatog (nekoherentnog)

materijala. U tom smislu razvijen je hiperbolični model tla kako bi se realno opisalo mehaničko ponašanje zrnatog materijala u svim mogućim stanjima naprezanja. Anvelopa sloma ovog modela proizlazi iz modela s nelinearnom deformabilnom zupčastom površinom [28], kako je to prikazano na slici 1.



Slika 1. Ispitivanja posmične čvrstoće zupčastog uzorka

Ploha sloma ovog konstitutivnog modela vrlo realno opisuje mehaničko ponašanje zrnatog materijala, naročito za niže vrijednosti normalnog naprezanja. Hiperbolični konstitutivni model je modifikacija Mohr-Coulombovog modela u kojem se kut unutarnjeg trenja definira u funkciji stanja naprezanja. Hiperbolična ploha sloma modela definirana je pomoću tri parametra materijala s jasnim fizikalnim značenjem, kako je to opisano u nastavku rada.

Jednadžbama mehaničkog ponašanja tla kao poroznog medija opisane su zakonitosti koje se odnose na kruti skelet tla, kao što je to slučaj i kod ostalih neporoznih materijala. Efektivno naprezanje se koristi u analizi djelomično ili potpuno zasićenih medija, tj. u određivanju konstitutivnih odnosa. Efektivne vrijednosti naprezanja i deformacije obično se označavaju znakom ( $'$ ). Međutim, u slučaju krupnozrnatih vrsta tla kao što je pjeskovito ili šljunkovito tlo, do disipacije poreznog tlaka dolazi vrlo brzo, pa su stoga vrijednosti efektivnog i ukupnog naprezanja jednake, zbog čega se spomenuti znak neće upotrijebiti u ovom radu.

Uzimajući u obzir činjenicu da u zrnatim nekoherentnim materijalima nema kohezije [29, 30], posmična čvrstoća tla može se definirati pomoću izraza (1).

$$\tau_f = \sigma_n \tan \phi(\sigma_n) \quad (1)$$

gdje se maksimalna vrijednost kuta unutarnjeg trenja može definirati kao

$$\phi_{\max} = \phi_{cv} + \psi \quad (2)$$

a  $\phi_{cv}$  predstavlja kut otpora na smicanje pri konstantnom volumenu, dok  $\psi$  predstavlja dilataciju materijala. Kut unutarnjeg trenja materijala ovisi o normalnom efektivnom naprezanju a može se definirati pomoću izraza (3) kao:

$$\phi(\sigma_n) = \phi_B + \delta\phi(\sigma_n) \quad (3)$$

Prema [1], drugi dio izraza (3) može se formulirati kao

$$\delta\phi(\sigma_n) = \frac{\Delta\phi}{1 + \frac{\sigma_n}{\rho_N}} \quad (4)$$

pa se tako kut unutarnjeg trenja materijala (3) može iskazati kao

$$\phi(\sigma_n) = \phi_B + \frac{\Delta\phi}{1 + \frac{\sigma_n}{\rho_N}} \quad (5)$$

Pomoću izraza (5), posmična čvrstoća materijala (1) može se konačno formulirati kao

$$\tau_f = \sigma_n \tan \left( \phi_B + \frac{\Delta\phi}{1 + \frac{\sigma_n}{\rho_N}} \right) \quad (6)$$

što predstavlja jednadžbu anvelope posmičnog naprezanja pri slomu [31] u funkciji normalnog naprezanja.

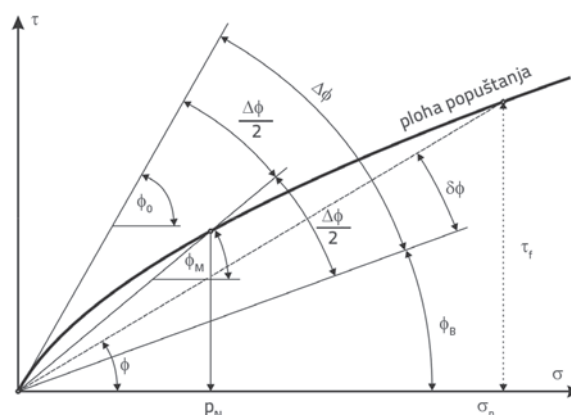
Parametri materijala koji se koriste u izrazima (3) do (6) su:

$\phi_B$  - bazični kut trenja,

$\Delta\phi$  - maksimalna razlika kuta  $\phi_O - \phi_B$ ,

$\rho_N$  - normalno naprezanje središnjeg sekantnog kuta.

Anvelopa posmičnog naprezanja pri slomu definirana je u jednadžbi (6), a prikazana je na slici 2. Kao što se na slici vidi, kada normalno naprezanje postane jednako nuli ( $\sigma_n \rightarrow 0$ ), tada nagib tangente anvelope sloma u ishodištu (početnom nagibu) iznosi  $\phi_O = \phi_B + \Delta\phi$ .



Slika 2. Anvelopa sloma hiperboličnog modela tla

Kada normalno naprezanje dosegne beskonačnu vrijednost ( $\sigma_n \rightarrow \infty$ ), tada kut unutarnjeg trenja  $\phi$  postiže vrijednost osnovnog kuta  $\phi_B$ . Materijalni parametar  $\rho_N$  predstavlja naprezanje pri kojem kut unutarnjeg trenja podrazumijeva srednju vrijednost između kutova  $\phi_B$  i  $\phi_O$ .

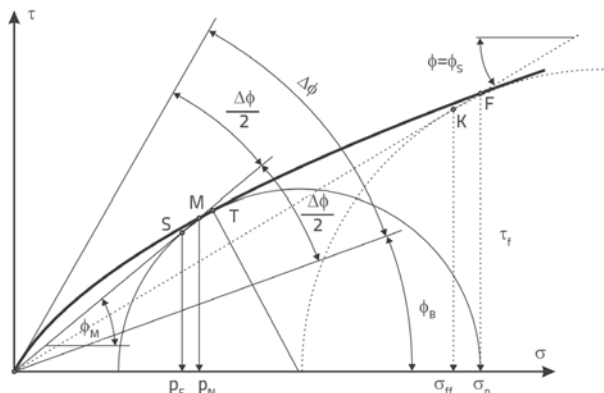
$$\phi_M = \phi_B + \Delta\phi/2 \quad (7)$$

Za stanje naprezanja pri slomu opisano pomoću Mohrovih kružnica može se definirati tangenta Mohrove kružnice iz ishodišta (slika 3). Njezin kut iznosi:

$$\sin \phi_s = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 + \sigma_3)_f} \tag{8}$$

gdje odgovarajuće normalno naprezanje iznosi

$$\sigma_{ff} = \sigma_3 (1 + \sin \phi_s) \tag{9}$$



Slika 3. Anvelopa sloma modela i konverzija parametara materijala

Očito je da zbog zakrivljenosti anvelope sloma, točka K, u kojoj tangenta dodiruje Mohrovu kružnicu i formira kut  $\phi_s$  sa osi  $\sigma$ , ne odgovara točki F, u kojoj tangenta presijeca anvelopu sloma. Međutim, prema [32], ovo odstupanje je dovoljno malo da se može zanemariti, pa se stoga može usvojiti da je  $p_N \approx p_F$ . Promjena kuta tangente Mohrove kružnice može se formulirati u funkciji normalnog naprezanja  $\sigma_{ff}$  pa se tako, pomoću jednadžbe (5), jednadžba kuta unutarnjeg trenja može formulirati kao

$$\phi_s = \phi_B + \frac{\Delta\phi}{1 + \frac{\sigma_{ff}}{p_F}} \tag{10}$$

Ako se napravi generalizacija tako da se, umjesto naprezanja  $\sigma_{ff}$  koristi srednje naprezanje, hiperbolična anvelopa sloma definirana u prostoru naprezanja  $\sigma-\tau$  može se transformirati u elastoplastični konstitutivni model u prostoru glavnog naprezanja. Pri tome je srednje naprezanje:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{11}$$

Stoga se kut unutarnjeg trenja (5) može izračunati kao

$$\phi_s = \phi_B + \frac{\Delta\phi}{1 + \frac{\sigma_m}{p_{AV}}} \tag{12}$$

gdje se parametar  $p_{AV}$  može izračunati pomoću izraza:

$$p_{AV} = p_F \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{3 - \sin \phi_M}{1 - \sin^2 \phi_M} \right) \tag{13}$$

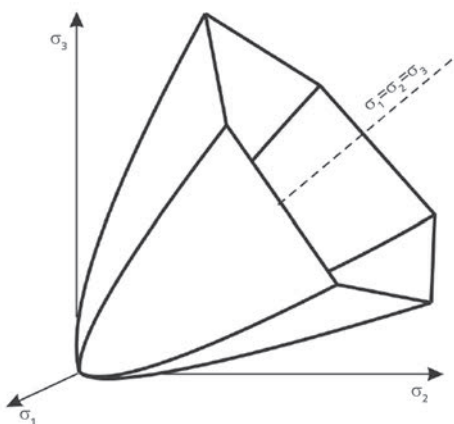
Potrebno je naglasiti da se anvelopa sloma definirana pomoću kutova unutarnjeg trenja (5), (10) i (12) ne podudara, osim kada normalno naprezanje poprimi vrijednost nula ili beskonačno, ili kada normalno naprezanje odgovara središnjem kutu  $\phi_M$ . Prema [26], razlika u kutu trenja varira u rasponu od  $\pm 0,2^\circ$  te se smanjuje sa smanjenjem razlike u kutu  $\Delta\phi$ . Zbog toga se uvedena aproksimacija može koristiti u numeričkim analizama, a njena je točnost dostatna za rješavanje inženjerskih problema.

### 2.1. Ploha popuštanja

Na temelju analize anvelope sloma Mohr-Coulombovog i hiperboličnog modela tla, može se zaključiti da izraz (1) udovoljava Mohr-Coulombovom uvjetu sloma u slučaju kada nema kohezije materijala koja je, kod Mohr-Coulombovog modela, rezultat linearizacije anvelope sloma i ne predstavlja stvarno ponašanje tla. U slučaju hiperboličnog modela tla, kut unutarnjeg trenja nema konstantnu vrijednost kao kod Mohr-Coulombovog modela, već ovisi o stanju naprezanja. Na temelju navedenoga, jednadžba plohe sloma iz hiperboličnog modela tla može se definirati pomoću Mohr-Coulombove plohe popuštanja ispuštanjem kohezije materijala i primjenom kuta unutarnjeg trenja u funkciji stanja naprezanja, kao u:

$$f = \frac{I_1}{3} \sin \phi(\sigma_n) + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi(\sigma_n) \right) \tag{14}$$

Ploha popuštanja hiperboličnog modela tla, definirana pomoću izraza (14), prikazana je na slici 4. u prostoru glavnog naprezanja. Ovaj konstitutivni model nema karakteristiku očvršćivanja. Drugim riječima, taj je model elastičan - savršeno plastičan. Stoga se može reći da ploha sloma modela istovremeno predstavlja i plohu popuštanja. U ovom se radu koristi izraz "ploha sloma", iako treba napomenuti da ploha sloma označava i plohu popuštanja.



Slika 4. Ploha sloma u prostoru glavnog naprezanja

U ovom se radu razmatra asocijativni uvjet popuštanja ili slučaj podudaranja plohe sloma i plohe plastičnog potencijala ( $g = f$ ). Dakle, te dvije plohe opisać će se istom jednadžbom, koja ne predstavlja opći slučaj.

U izrazu (14),  $I_1$  predstavlja prvu invarijantu naprezanja,  $J_{2D}$  je druga invarijanta devijatorskog naprezanja,  $\varphi$  je Lodeov kut, a  $\phi(\sigma_n)$  predstavlja kut unutarnjeg trenja koji je definiran u izrazu (12).

Potrebni parametri prezentiranog konstitutivnog modela zrnatog tla temeljenog na hiperboličnoj plohi sloma prikazani su u tablici 1.

Tablica 1. Sažeti prikaz parametara modela

Parametar materijala	Naziv parametra	Jedinica mjere
E	Youngov modul elastičnosti	[kN/m <sup>2</sup> ]
$\nu$	Poissonov koeficijent	[-]
$\phi_B$	Bazični kut trenja	[°]
$\Delta\phi$	Maksimalna razlika kuta $\phi_O - \phi_B$	[°]
$p_N$	Normalno naprezanje središnjeg sekantnog kuta	[kN/m <sup>2</sup> ]

### 3. Integracija naprezanja hiperboličnog modela tla

#### 3.1. Derivacije funkcije popuštanja

Jednadžba plohe popuštanja u hiperboličnom modelu tla (14) predstavlja složenu funkciju naprezanja, pa se njena derivacija može izračunati pomoću lančanih pravila [33] prema

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \quad (15)$$

gdje je  $\sigma$  tenzor naprezanja za kartezijanske komponente koje u slučaju izotropnih materijala sadrže šest komponenta, što se može izraziti u obliku vektora

$$\sigma^T = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}] \quad (16)$$

Pojedinačni dijelovi jednadžbe (15) predstavljaju derivacije funkcije popuštanja (14) po invarijantama naprezanja, Lodeovom kutu i kutu unutarnjeg trenja. Pojedinačne se derivacije mogu izračunati kako slijedi:

$$\frac{\partial f}{\partial I_1} = \frac{\sin \phi}{3} \quad (17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial J_{2D}} = \frac{1}{2\sqrt{J_{2D}}} \left\{ \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right\} \quad (18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\sqrt{J_{2D}} \left( \sin \theta + \frac{\cos \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) \quad (19)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \left( \frac{I_1}{3} - \sqrt{\frac{J_{2D}}{3}} \sin \theta \right) \cos \phi \quad (20)$$

Derivacije prve invarijante naprezanja i druge invarijante devijatorskog naprezanja dani su izrazima (21) i (22):

$$\frac{\partial I_1^T}{\partial \sigma} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (21)$$

$$\frac{\partial J_{2D}^T}{\partial \sigma} = \left[ \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \quad \frac{1}{3}(-\sigma_x + 2\sigma_y - \sigma_z) \quad \frac{1}{3}(-\sigma_x - \sigma_y + 2\sigma_z) \quad 2\sigma_{xy} \quad 2\sigma_{yz} \quad 2\sigma_{zx} \right] \quad (22)$$

Derivacija unutarnjeg kuta trenja po naprezanju iznosi

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial \sigma} = \left[ -\frac{3\Delta\phi p_{AV}}{(I_1 + 3p_{AV})^2} \quad -\frac{3\Delta\phi p_{AV}}{(I_1 + 3p_{AV})^2} \quad -\frac{3\Delta\phi p_{AV}}{(I_1 + 3p_{AV})^2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (23)$$

a derivacija Lodeovog kuta može se izračunati pomoću lančanog pravila [33] kako slijedi:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{\partial \theta}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \theta}{\partial J_{3D}} \frac{\partial J_{3D}}{\partial \sigma} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial J_{2D}} = \frac{3J_{3D}}{2J_{2D}^{5/2} \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{9J_{3D}^2}{J_{2D}^3}}} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial J_{3D}} = -\frac{1}{J_{2D}^{3/2} \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{9J_{3D}^2}{J_{2D}^3}}} \quad (26)$$

$$\frac{\partial J_{3D}}{\partial \sigma} = \begin{bmatrix} \sigma^* - \sigma_{yz}^2 + \sigma_y \sigma_z + \sigma_m (\sigma_y + \sigma_z) + 2\sigma_m^2 \\ \sigma^* - \sigma_{zx}^2 + \sigma_x \sigma_z + \sigma_m (\sigma_x + \sigma_z) + 2\sigma_m^2 \\ \sigma^* - \sigma_{xy}^2 + \sigma_x \sigma_y + \sigma_m (\sigma_x + \sigma_y) + 2\sigma_m^2 \\ -2\sigma_z \sigma_{xy} + 2\sigma_{yz} \sigma_{zx} - 2\sigma_{xy} \sigma_m \\ -2\sigma_x \sigma_{yz} + 2\sigma_{zx} \sigma_{xy} - 2\sigma_{yz} \sigma_m \\ -2\sigma_y \sigma_{zx} + 2\sigma_{xy} \sigma_{yz} - 2\sigma_{zx} \sigma_m \end{bmatrix} \quad (27)$$

Za kraći se oblik u jednadžbu (27) unosi sljedeća promjena

$$\sigma^* = \frac{1}{3} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{zx}^2) \quad (28)$$

Navedene jednadžbe koriste se u implicitnoj integraciji naprezanja hiperboličnog modela tla. Koraci za integraciju naprezanja pomoću ovog modela mogu se sažeto iskazati u obliku algoritma prikazanog u odjeljku koji slijedi.

#### 3.2. Algoritam za implicitnu integraciju naprezanja

Algoritam povratnog preslikavanja razvijen je kako bi se provela implicitna integracija naprezanja hiperboličnog modela tla [22, 23]. Metoda implicitne integracije je stabilna [34, 35] i prilično se često koristi za integraciju naprezanja u raznim modelima [36-38], uključujući i modele kritičnog stanja [39-44]. Njegov nedostatak je potencijalna nemogućnost postizanja konvergencije numeričkog rješenja u lokalnim iteracijama za veće vrijednosti inkrementa, isto kao i u slučajevima kada je

funkcija popuštanja ili funkcija plastičnog potencijala izrazito nelinearna [45-48].

Primjenom razvijene teorije, na početku svakog vremenskog koraka izračunava se probno elastično rješenje ili takozvani elastični prediktor. Zatim se provjerava stanje popuštanja. Ako do plastične deformacije dolazi u trenutnom vremenskom koraku, uvjet popuštanja neće biti ispunjen te će se trebati korigirati ukupna deformacija izračunavanjem plastičnog korektora. Plastični korektor predstavlja dio plastične deformacije u ukupnoj deformaciji (inkrement). Kako bi se precizno izračunala vrijednost inkrementa plastične deformacije u vremenskom koraku, provode se lokalne iteracije s korekcijom skalara ili se intenzitet inkrementa plastične deformacije korigira a smjer vektora plastične deformacije se mijenja. U nekim konstitutivnim modelima, derivacije funkcije popuštanja i plastičnog potencijala mogu biti vrlo složene, što otežava proračun takvih derivacija. Međutim, to se može riješiti primjenom numeričkih derivacija funkcija popuštanja i plastičnog potencijala umjesto korištenja analitičkih derivacija. Razvijeni algoritam za implicitnu integraciju naprezanja hiperboličnog modela tla prikazan je u tablici 2. Prikazani algoritam unesen je u program PAK [49] i obavljena je njegova provjera primjenom odgovarajućih numeričkih primjera.

#### 4. Validacija modela i provjera algoritma

Razvijeni algoritam za implicitnu integraciju naprezanja primjenom hiperboličnog modela tla provjeren je na dva primjera. Prvi primjer je numerička simulacija troosnog ispitivanja koja je provedena kako bi se utvrdilo opisuje li razvijeni model precizno čvrstoću materijalnog uzorka za definirane parametre materijala. Drugi primjer je numerička simulacija pokusa izravnog smicanja a provedena je kako bi se utvrdilo da li razvijeni model precizno opisuje mehaničko ponašanje stvarnih uzoraka podvrgnutih ispitivanju čvrstoće na smicanje. Parametri materijala utvrđeni su povratnom analizom [50]. Rezultati numeričke simulacije uspoređeni su s analitičkim i eksperimentalnim rezultatima.

Tablica 2. Algoritam implicitne integracije naprezanja za hiperbolični model tla

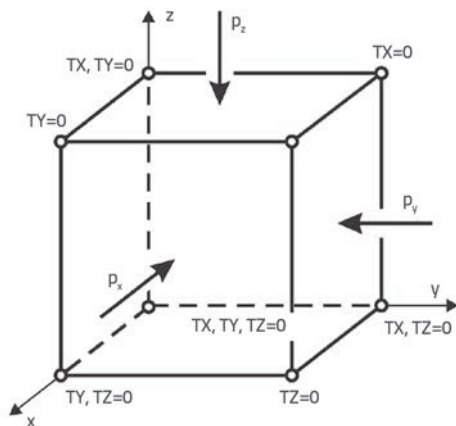
<p>Poznato: <math>{}^{t+\Delta t}\mathbf{e}</math>, <math>\mathbf{e}</math>, <math>\mathbf{e}^p</math></p> <p><b>A. Probno (elastično) rješenje:</b>  <math>d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E = \mathbf{C}^E(\Delta\mathbf{e} - \mathbf{e}^p)</math>, <math>{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}^p + d\boldsymbol{\sigma}</math></p> <p>Invarijanta naprezanja: <math>I_1, J_{2D}, \theta</math></p> $P_{AV} = P_F \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{3 - \sin \phi_M}{1 - \sin^2 \phi_M} \right), P_F \approx P_N, \phi_M = \phi_B + \frac{\Delta \phi}{2}, \phi = \phi_B + \frac{\Delta \phi}{1 + \frac{\sigma_m}{P_{AV}}}$ <p>Funkcija popuštanja i plastičnog potencijala (asocijativni uvjet popuštanja):</p> $f = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right)$ <p><b>B. Provjera stanja popuštanja:</b></p> <p>IF (<math>f &lt; 0</math>) elastična deformacija (otići na <b>E</b>)                  IF (<math>f \geq 0</math>) elastoplastična deformacija (NASTAVITI)</p> $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial J_{2D}} \frac{\partial J_{2D}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ $d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E d\mathbf{e}}{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^E \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}$ <p><b>C. Korekcija <math>d\lambda</math> (lokalne iteracije):</b></p> $d\mathbf{e}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, d\mathbf{e}^E = d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^p$ $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^E d\mathbf{e}^E, {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}^p + d\boldsymbol{\sigma}$ <p>Nove invarijante:  <math>I_1, J_{2D}, \theta</math></p> $P_{AV} = P_F \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{3 - \sin \phi_M}{1 - \sin^2 \phi_M} \right), P_F \approx P_N, \phi_M = \phi_B + \frac{\Delta \phi}{2}, \phi = \phi_B + \frac{\Delta \phi}{1 + \frac{\sigma_m}{P_{AV}}}$ <p>Provjera funkcije popuštanja:</p> $f = \frac{I_1}{3} \sin \phi + \sqrt{J_{2D}} \left( \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \phi \right)$ <p><b>D. AKO</b> (<math>ABS(f) \geq TOL</math>) vratiti se na <b>C</b> s novom vrijednošću <math>d\lambda</math>:</p> ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^p = \mathbf{e}^p + d\mathbf{e}^p$ <p><b>E. Kraj:</b> <math>{}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}</math>, <math>{}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^p</math></p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

#### 4.1. Numerička simulacija troosnog ispitivanja

Numeričkim modeliranjem troosnog ispitivanja može se jednostavno utvrditi da li razvijeni konstitutivni model opisuje čvrstoću materijala u skladu s kriterijem teoretskog sloma za zadane parametre modela. Stoga numeričko rješenje troosnog ispitivanja nije uspoređeno s eksperimentalnim rezultatima. Trag naprezanja može se općenito kategorizirati prema vrsti opterećenja i smjeru opterećenja. U ovom je slučaju ponašanje

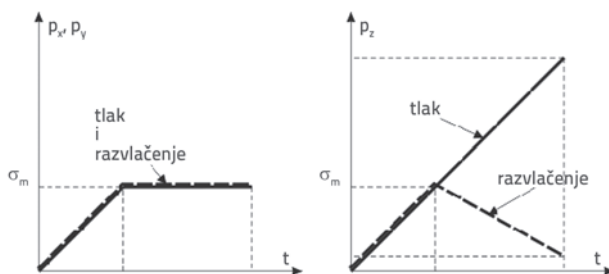
razvijenog elastoplastičnog modela zrnatog tla temeljenog na hiperboličnoj plohi sloma provjereno analizom osnog tlaka i osnog razvlačenja. Korištena su četiri različita bočna naprezanja. U ispitivanju tlačne čvrstoće, uzorak je opterećen hidrostatičkim naprezanjem, nakon čega je naprezanje povećano u jednom smjeru dok je u druga dva smjera ostalo nepromijenjeno. U vlačnom ispitivanju, nakon postizanja hidrostatičkog stanja naprezanja, veličina naprezanja smanjena je u jednom smjeru, dok je u druga dva smjera ostala nepromijenjena.

Korišteni model konačnih elemenata sastoji se od jednog trodimenzionalnog heksagonalnog konačnog elementa jediničnih dimenzija. Geometrija modela, rubni uvjeti i opterećenja prikazani su na slici 5. Analizirani model ima tri ravnine simetrije, pa su stoga korišteni odgovarajući rubni uvjeti simetrije. Modelska opterećenja aplicirana su nanošenjem zadanog tlaka u tri koordinatna smjera. Opterećenje je povećavano u više koraka sve do sloma uzorka (nemogućnost postizanja konvergencije numeričkih rješenja).



Slika 5. Model konačnih elemenata za simulaciju troosnog ispitivanja

Kako bi se provjerilo omogućuje li model postizanje analitičke vrijednosti naprezanja pri slomu u raznim stanjima naprezanja, postupak je ponavljan za četiri razine bočnog naprezanja:  $\sigma_m = 0,213$  MPa,  $0,421$  MPa,  $0,839$  MPa i  $1,665$  MPa. U pokusu tlačnog opterećenja, nakon postizanja početnog stanja naprezanja, vertikalni je tlak povećavan sve do sloma. U ispitivanju razvlačenja, nakon postizanja početnog stanja naprezanja, vertikalni je tlak smanjivan sve do sloma. Korištene funkcije naprezanja prikazane su na slici 6.



Slika 6. Funkcije opterećenja u simulaciji troosnog ispitivanja

Parametri materijala korišteni u numeričkoj simulaciji troosnog ispitivanja preuzeti su iz izvještaja [51]. Parametri materijala modela prikazani su u tablici 3.

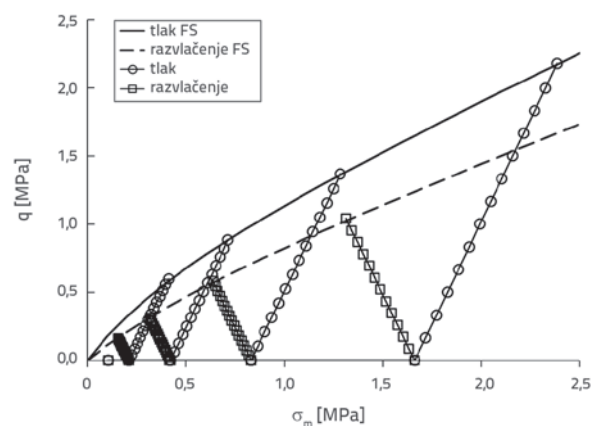
Tablica 3. Parametri materijala korišteni u simulaciji troosnog ispitivanja

Parametar	Oznaka	Vrijednost
Young-ov modul elastičnosti	E	20 MPa
Poissonov koeficijent	$\nu$	0,3
Konstanta materijala	$\varphi_B$	$17,22^\circ$
Konstanta materijala	$\Delta\varphi$	$29,38^\circ$
Konstanta materijala	$p_N$	0,62 MPa

Rezultati simulacije troosnog ispitivanja prikazani su na slici 7., za različite vrijednosti bočnog tlaka u pokusima tlačenja i razvlačenja.

$$q = \sqrt{3J_{2D}} \quad (29)$$

Numerički rezultati prikazani su u obliku traga naprezanja za oba analizirana slučaja i za sva bočna naprezanja u prostoru naprezanja  $\sigma_m - q$ , gdje je  $\sigma_m$  srednja vrijednost naprezanja (bočno naprezanje) dok je  $q$  druga invarijanta devijatorskog naprezanja prikazana u (29).



Slika 7. Trag naprezanja (tlačenje i razvlačenje) u simulaciji troosnog ispitivanja

Na temelju analize rezultata može se zaključiti da naprezanja postignuta u modelu primjenom ove metode odgovaraju plohi sloma koja je dobivena pomoću hiperboličnog modela tla. Drugim riječima, razvijeni model opisuje čvrstoću materijala koja odgovara teoretskim vrijednostima naprezanja pri slomu.

#### 4.2. Numerička simulacija ispitivanja izravnim smicanjem

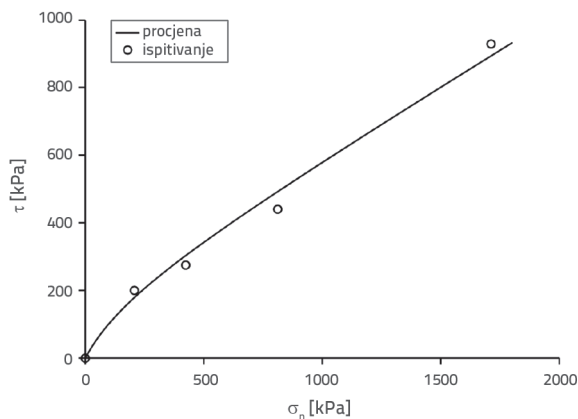
Sljedeći primjer provjere algoritma razvijenog za implicitno integriranje naprezanja u hiperboličnom modelu tla obuhvaća

u numeričku simulaciju pokusa izravnog smicanja. To relativno jednostavno ispitivanje često se primjenjuje za definiranje parametara materijala, pa je stoga njegova numerička simulacija pogodna i za provjeru konstitutivnog modela. Analizirani materijal je kameni nabačaj koji je uzet s nizvodnog (zaobalnog) pokosa brane (zrnati materijal), pa je tako primjena hiperboličnog modela tla pogodna za numeričku simulaciju mehaničkog ponašanja tog materijala. Eksperimentalni rezultati pokusa izravnog smicanja za materijal iz potpornog tijela nasute brane [51] prikazani su u tablici 4. i korišteni za definiranje parametara konstitutivnog modela. Iste vrijednosti normalnog napreznja korištene su u numeričkoj simulaciji pokusa izravnog smicanja.

Tablica 4. Izmjerene vrijednosti posmičnog napreznja pri slomu i normalnog napreznja

Blok br.	$\sigma_n$ [kPa]	$\tau$ [kPa]
1	209	200
2	426	276
3	813	440
4	1713	927

Na slici 8. prikazani su rezultati pokusa izravnog posmika te ploha sloma dobivena identifikacijom parametara materijala. Parametri materijala procijenjeni pomoću hiperboličnog modela tla prikazani su u tablici 5. Ti su procijenjeni parametri korišteni u numeričkoj simulaciji pokusa izravnog posmika. Korišteni model konačnih elementa sastoji se od jednog konačnog elementa jediničnih dimenzija s rubnim uvjetima i opterećenjima (slika 9.). Rubni uvjeti primjenjeni u numeričkoj simulaciji odgovaraju rubnim uvjetima u posmičnom sloju uzorka.



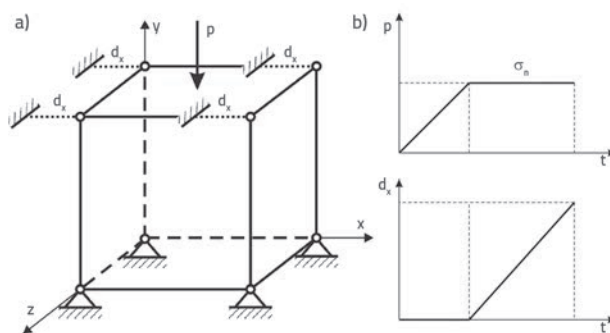
Slika 8. Izmjereno i procijenjeno normalno i posmično napreznje pri slomu

Opterećenje modela provedeno je u dvije faze. U prvoj fazi vertikalni je tlak zadan na gornjoj površini modela ( $p$ ) sve do vrijednosti normalnog napreznja korištenog u ispitivanju (tablica 4.).

Tablica 5. Procijenjeni materijalni parametri hiperboličnog modela tla

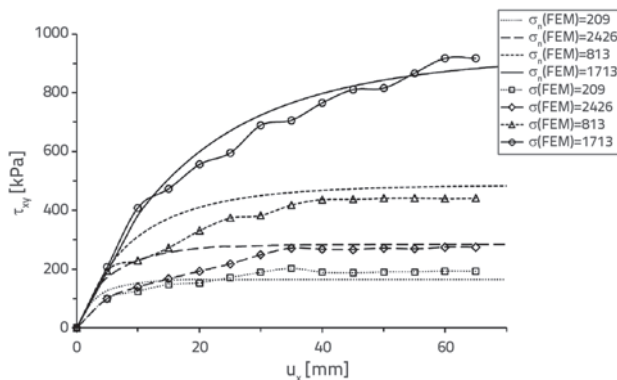
Parametar	Oznaka	Vrijednost
Youngov modul elastičnosti	$E$	100 MPa
Poissonov koeficijent	$N$	0,3
Konstanta materijala	$\varphi_B$	23,01°
Konstanta materijala	$\Delta\varphi$	29,83°
Konstanta materijala	$P_N$	310,0 kPa

Nakon postizanja zadane vrijednosti normalnog napreznja, definiran je horizontalni pomak čvorova na gornjoj površini modela ( $d_x$ ). Funkcije opterećenja korištene u uređaju za ispitivanje bile su jednake onima koje se koriste u numeričkoj simulaciji (slika 9.b).



Slika 9. Model konačnih elemenata za simuliranje pokusa izravnog smicanja i funkcije opterećenja

Rezultati numeričke simulacije i rezultati ispitivanja prikazani su kao  $\tau_{xy} - e_x$  (slika 10.). Uspoređivanjem numeričkih rezultata dobivenih pomoću razvijenog algoritma s eksperimentalnim rezultatima prikazanim na slici 10., može se primijetiti kako razvijeni konstitutivni model u velikoj mjeri slijedi trend eksperimentalnih rezultata. Ipak, značajna se odstupanja mogu uočiti pri nižim vrijednostima deformacije. Razlog tome možda leži u činjenici da razvijeni model ne posjeduje karakteristiku ojačanja, o čemu bi se moglo pobliže raspraviti u okviru budućih istraživanja modela.



Slika 10. Rezultati mjerenja i simulacije pokusa izravnog smicanja

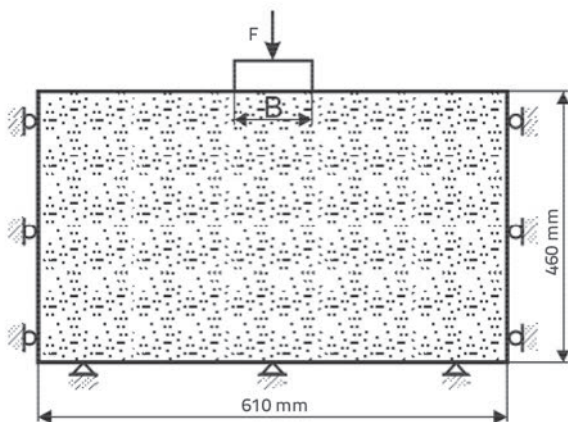


Utvrđeno je da se parametri razvijenog konstitutivnog modela mogu dobiti pokusom izravnog smicanja u velikom mjerilu. Osim toga, očito je da se razvijenim algoritmom za implicitnu integraciju naprezanja pomoću hiperboličnog modela tla može dobro opisati opće mehaničko ponašanje analiziranog uzorka zrnatog materijala. Zbog mogućnosti jednostavnog umanjavanja anvelope posmičnog naprezanja, ovaj se konstitutivni model smatra pogodnim za primjenu u metodi smanjenja posmične čvrstoće (SSR) [52].

### 4.3. Trakasti temelj

U ovom je primjeru predstavljena numerička simulacija trakastog temelja na nekoherentnom tlu koja je preuzeta iz literature [53]. U svrhu baždarenja modela, izrađena je krivulja opterećenja - slijeganja na temelju laboratorijskog eksperimenta. Numerička simulacija provedena je pomoću Mohr-Coulombovog konstitutivnog modela, isto kao i modela tla temeljenog na hiperboličnoj površini sloma. Dobiveno numeričko rješenje uspoređeno je s rezultatima laboratorijskog ispitivanja opisanog u istoj literaturi.

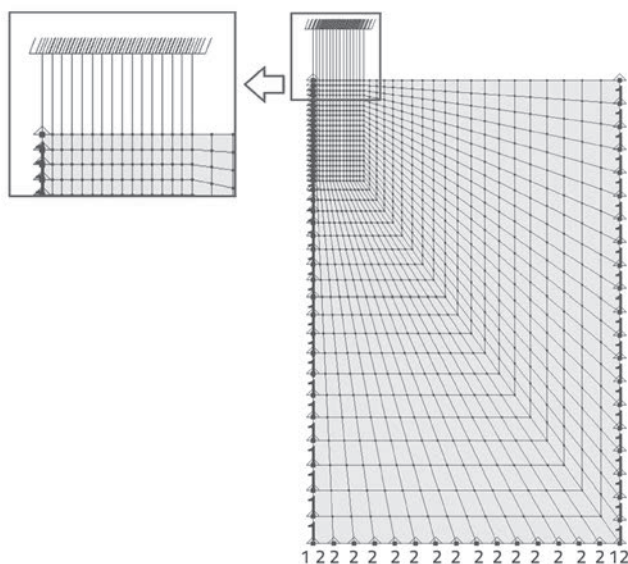
Shematski prikaz ispitivanja uzoraka u laboratoriju, s rubnim uvjetima i opterećenjima, nalazi se na slici 11., a slika 12. prikazuje model konačnih elemenata koji je korišten u numeričkoj simulaciji ispitivanja trakastog temelja.



Slika 11. Laboratorijsko ispitivanje trakastog temelja u mjerilu

Na slici 12. također su prikazani rubni uvjeti i opterećenja koji su korišteni u numeričkoj simulaciji, u skladu s rubnim uvjetima i opterećenjima koja su korištena u laboratorijskom ispitivanju. Zbog simetrije problema, modelirana je polovica uzorka uz primjenu odgovarajućeg rubnog uvjeta. Model je opterećen u dvije faze: u prvoj je fazi definirana 'mrtva težina' (eng. *dead weight*) kako bi se uspostavilo početno stanje naprezanja, a u drugoj je fazi nanoseno opterećenje temelja primjenom zadatog pomaka.

Kao što je već spomenuto, parametri materijala Mohr-Coulombovog modela i hiperboličnog modela tla su procijenjeni pomoću eksperimentalnih rezultata prilagodbe nelinearne krivulje, kao što je to prikazano u tablici 6.

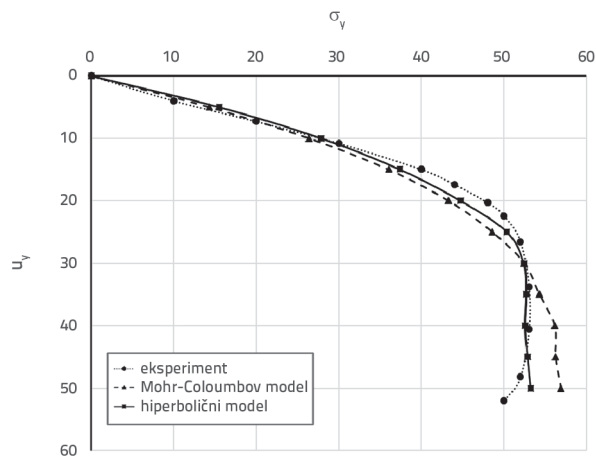


Slika 12. Model konačnih elemenata trakastog temelja

Tablica 6. Procjena materijalnih parametara pomoću Mohr-Coulombovog i hiperboličnog modela

Mohr-Coulombov model		Hiperbolični model	
E [kN/m <sup>2</sup> ]	900	E [kN/m <sup>2</sup> ]	900
v [-]	0,3	v [-]	0,3
γ [kN/m <sup>3</sup> ]	18,1	γ [kN/m <sup>3</sup> ]	18,1
c [kPa]	0	φ <sub>B</sub> [°]	10,1
φ [°]	22,5	Δφ [°]	8,2
ψ [°]	0,0	p <sub>N</sub> [kN/m <sup>2</sup> ]	44,5

Rezultati numeričke simulacije prikazani su na slici 13. Na toj se slici vidi da su rezultati dobiveni pomoću oba konstitutivna modela u skladu s laboratorijskim rezultatima.



Slika 13. Krivulje opterećenje - slijeganje temeljene na laboratorijskom ispitivanju i numeričkoj simulaciji

U vezi s analiziranim parametrima može se uočiti da rezultati dobiveni primjenom modela tla temeljenog na hiperboličnoj plohi sloma bolje odgovaraju eksperimentalnim rezultatima dobivenim ispitivanjem temelja. Ta činjenica pokazuje da model tla baziran na hiperboličnoj površini sloma točnije opisuje mehaničko ponašanje nekoherentnog zrnatog materijala kao što je suhi pijesak.

## 5. Zaključak

U radu se razmatra razvoj konstitutivnog modela nekoherentnog zrnatog materijala temeljenog na hiperboličnoj plohi sloma, primjenom teorije inkrementalne plastičnosti. Ploha popuštanja (rubna ploha) modela definirana je modificiranjem Mohr-Coulombove plohe sloma i uvođenjem varijabilnog kuta unutarnjeg trenja kao funkcije stanja naprezanja. Ovaj model omogućuje realniji opis mehaničkog ponašanja nekoherentnog tla, naročito pri nižim vrijednostima normalnog naprezanja. Prikazana je formulacija modela te je detaljno opisan razvoj konstitutivnog odnosa za implicitnu integraciju naprezanja. Ploha popuštanja modela definira se pomoću tri parametra materijala čija su fizikalna obilježja prezentirana u radu. Ti se parametri materijala mogu dobiti bilo pokusom izravnog smicanja ili troosnim pokusom. Algoritam povratnog preslikavanja primjenjuje se kako bi se model mogao koristiti u programu opće namjene PAK temeljenom na metodi konačnih

elemenata. Algoritam je provjeren kroz nekoliko primjera ispitivanja. Razvijenim modelom postiže se dobra podudarnost numeričkih rezultata i analitičkih rezultata te se u velikoj mjeri slijedi trend eksperimentalnih rezultata. Ipak su uočena neka odstupanja kod nižih vrijednosti deformacije, a razlog tome je činjenica da razvijeni model nema karakteristiku ojačanja. Ta bi se odstupanja mogla analizirati u okviru daljnjeg razvoja modela. Navedena svojstva modela potvrđuju njegovu primjenjivost u rješavanju stvarnih geotehničkih problema. Prikladnost hiperboličnog konstitutivnog modela temeljenog na anvelopi nelinearnog sloma za rješavanje raznih inženjerskih problema dokazuje se činjenicom da se parametri mogu dobiti izravno u okviru standardnih laboratorijskih pokusa. Razvijeni se model može poboljšati uvođenjem neasocijativnog uvjeta sloma. Osim toga, model se može modificirati primjenom kinematičkog ojačanja, pa tako može postati pogodan za dinamičke analize zrnatih materijala. Zbog mogućnosti jednostavnog umanjavanja anvelope posmičnog naprezanja, ovaj konstitutivni model pogodan je za primjenu metode smanjenja posmične čvrstoće (SSR).

## Zahvale

Ovo je istraživanje provedeno uz djelomičnu potporu Ministarstva obrazovanja i znanosti Republike Srbije u okviru projekata TR32036 i TR37013.

## LITERATURA

- [1] Maksimović, M.: Nonlinear Failure Envelope for Soils, *Journal of Geotechnical Engineering*, 115 (1989) 4, pp. 581-586.
- [2] Drucker, D., Prager W.: Soil mechanics and plastic analysis for limit design, *Quarterly of Applied Mathematics*, 10 (1952) 2, pp. 157-165.
- [3] Maksimović, M.: New description of the shear strength for rock joints, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 25 (1992) 4, pp. 275-284.
- [4] Leps, T.M.: Review of Shearing Strength of Rockfill, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 96 (1970) 4, pp. 1159-1170.
- [5] Barton, R.N.: The shear strength of rock and rock joints, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 13 (1976) 9, pp. 255-279.
- [6] Barton, N., Kjaernsli, B.: Shear Strength of Rockfill, *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 107 (1981) 7, pp. 873-891.
- [7] Charles, J.A., Watts, K.S.: The influence of confining pressure on the shear strength of compacted rockfill, *Géotechnique*, 30 (1980) 4, pp. 353-367.
- [8] Goldscheider, M.: True triaxial tests on dense sands, *Constitutive relations for soils*, ed. Gudehus, G., Darve, F., Vardoulakis, I., Balkema, Rotterdam, pp. 11-54, 1984.
- [9] Drucker, D.C., Prager, W.: Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Quart. Appl. Math.*, 10 (1952) 2, pp. 157-165.
- [10] Brinkgreve, R.B.J.: Selection of soil models and parameters for geotechnical engineering application, *Geotechnical Special Publication ACSE*, ed. Yamamuro, J.A., Kaliakin, V.N., 128 (2005), pp. 69-98.
- [11] Duncan, J.M., Chang, C.Y.: Nonlinear analysis of stress and strain in soil, *ASCE Journal of the Soil Mech. And Found. Div.*, 96, pp. 1629-1653, 1970.
- [12] Kondner, R.L.: Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils, *ASCE Journal of the Soil Mech. and Found. Div.*, 89 (1963), pp. 115-143.
- [13] Ohde, J.: Zur Theorie der Druckverteilung im Baugrund, *Der Bauingenieur*, 20 (1939), pp. 451-459.
- [14] Zienkiewicz, O., Taylor, R.: *Finite Element Method: Volume 1, Fifth Edition*, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [15] Bathe, K.J.: *Finite Element Procedures*, Massachusetts Institute of Technology, USA, 1996.
- [16] Kojić, M.: The governing parameter method for implicit integration of viscoplastic constitutive relations for isotropic and orthotropic metals, *Computational Mechanics*, 19 (1996), pp. 49-57.
- [17] Wilkins, M.L.: *Calculation of elastic-plastic flow*, Livermore, California: University of California, Lawrence Radiation Laboratory, 1963.

- [18] Kojić, M., Bathe, K.J.: The effective-stress-function algorithm for thermo-elasto-plasticity and creep, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 (1987), pp. 1509-1532.
- [19] Kojić, M., Bathe K.J.: Thermo-elastic-plastic and creep analysis of shell structures, *Computer and Structures*, 26 (1987) 1/2, pp. 135-143.
- [20] Bathe, K.J., Chaudhary, A.B., Dvorkin, E.N., Kojić, M.: On the Solution of Nonlinear Finite Element Equations, *Proceedings of the Int. Conference on Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Split, Croatia, 1984.
- [21] Kojic, M., Bathe, K.J.: *Inelastic Analysis of Solids and Structures*, 1<sup>st</sup> edition, Springer, 2004.
- [22] Simo, J.C., Taylor, R.: Consistent Tangent Operators for Rate-independent Elastoplasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48 (1985) 1, pp. 101-118.
- [23] Simo, J.C., Taylor, R.: A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22 (1986), pp. 649-670.
- [24] Jeremic, B.: *Lecture Notes on Computational Geomechanics*, University of California at Davis, 2010.
- [25] Dunne, F., Petrinic, N.: *Introduction to Computational Plasticity*, Oxford University, 2005.
- [26] Sheng, D., Sloan, S.W., Gens, A., Smith, D.W.: Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. Part I: Theory, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 27 (2003) 9, pp. 745-765.
- [27] Zhang, C., Ji, J., Yang, S.Q., Kodikara J.: Implicit integration of simple breakage constitutive model for crushable granular materials: A numerical test, *Computers and Geotechnics*, 82 (2017), pp. 43-53.
- [28] Patton, F.D.: *Multiple Modes of Shear Failure In Rock*, 1<sup>st</sup> ISRM Congress-International Society for Rock Mechanics, Lisbon, Portugal, 1966.
- [29] Duriez, J., Vincens, É.: Constitutive modelling of cohesionless soils and interfaces with various internal states: An elasto-plastic approach, *Computers and Geotechnics*, 63 (2015), pp. 33-45.
- [30] Bolton, M.D.: The Strength and Dilatancy of Sands, *Geotechnique*, 1 (1986) 36, pp. 65-78.
- [31] Tu, Y., Zhong, Z., Luo, W., Liu, X.: A modified shear strength reduction finite element method for soil slope under wetting-drying cycles, *Geomechanics and Engineering*, 11 (2016) 6, pp. 739-756.
- [32] Maksimović, M.: *Soil mechanics*, fourth edition, AMG book, Belgrade, 2008.
- [33] Bronshtein, I., Semendyayev, K., Musiol, G., Muehlig, H.: *Handbook of Mathematics*, Frankfurt am Main, Wissenschaftlicher Verlag Harz Deutch GmbH, 2005.
- [34] Ortiz, M., Popov, E.P.: Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21 (2005) 9, pp. 1561-1576.
- [35] Simo, J.C., Govindjee, S.: Non-linear B-stability and symmetry preserving return mapping (2005) 1, pp. 151-176.
- [36] Grujović, N., Divac, D., Živković, M., Slavković, R., Milivojević, N., Milivojević, V., Rakić, D.: An inelastic stress integration algorithm for a rock mass containing sets of discontinuities, *Acta Geotechnica*, 8 (2013) 3, pp. 265-278.
- [37] Rakić, D., Živković, M.: Stress integration of the Drucker-Prager material model with kinematic hardening, *Theoretical and applied mechanics*, 42 (2015) 3, pp. 201-209.
- [38] Rakić, D., Živković, M., Vulović, S., Divac, D., Slavković, R., Milivojević, N.: Embankment dam stability analysis using FEM, 3<sup>rd</sup> South-East European Conference on Computational Mechanics, ECCOMAS and IACM Special Interest Conference, Kos Island, Greece, 2013.
- [39] Borja, R., Lee, S.: Cam-Clay plasticity, Part 1: Implicit integ (1990) 1, pp. 49-72.
- [40] Borja, R.: Cam-Clay plasticity, Part II: Implicit integration of constitutive equation, (1991) 2, pp. 225-240.
- [41] Kojić, M., Slavković, R., Grujović, N., Vukićević, M.: Implicit stress integration algorithm for the modified Cam-Clay material, *Theoretical and Applied Mechanics*, 20 (1994), pp. 95-118.
- [42] Kojić, M., Vukićević, M.: Elastic-plastic analysis of soil by using bounding surface Cam-clay model, *Proceedings of the Fifth International Conference on Computational Plasticity*, Barcelona, Spain, 1997.
- [43] Vukićević, M.: Governing parameter method for implicit stress integration of modified Cam-Clay model, using the mean stress as the governing parameter, XIV Danube - European Conference on Geotechnical Engineering: From research to design in European practice, Bratislava, Slovakia, 2010.
- [44] Jocković, S., Vukićević, M.: Bounding surface model for overconsolidated clays with new state parameter formulation of hardening rule, *Computers and Geotechnics*, 83 (2017), pp. 16-29.
- [45] Anandarajah, A.: *Computational Methods in Elasticity and Plasticity: Solids and Porous Media*, Springer, 2010.
- [46] Scott, S., Andrew, A., Daichao, S.: Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control, *Engineering Computations*, 18 (1984) 1/2, pp. 121-194.
- [47] Desai, C.: Constitutive modeling of materials and contacts using the disturbed state concept: Part 1 - Background and analysis, *Computers & Structures*, 146 (2015), pp. 214-233.
- [48] Doležalova, M., Zemanova, V., Jaroslav, D.: Convergence measurement and numerical modeling of the rock mass, *Građevinar*, 52 (2000) 3, pp. 135-142
- [49] Kojić, M., Slavković, R., Živković, M., Grujović, N.: PAK-finite element program for linear and nonlinear structural analysis and heat transfer, University of Kragujevac, Faculty of Engineering, Kragujevac.
- [50] Vahdati, P.: Identification of soil parameters in an embankment dam by mathematical optimization, Luleå University of Technology, Luleå, Sweden, 2014.
- [51] Jaroslav Cerni Institute for the Development of Water Resources: Elaborate on geological research results - Preliminary project, Belgrade, Serbia, 2011.
- [52] Berisavljević, Z., Berisavljević, D., Čebašek, V., Rakić, D.: Slope stability analyses using limit equilibrium and soil strength reduction methods, *Građevinar*, 67 (2015) 10, pp. 975-983.
- [53] Lee, M., Bae, K., Kim, H.T., Baek, S.C., Youn, H.: Similitude law for shallow foundation on cohesionless soils using 2D finite element analysis, *Japanese Geotechnical Society Special Publication*, 2 (2015) 39, pp. 1416-1419.