

# PRORAČUN VIŠEETAŽNOG OKVIRA S KOSIM STUBOVIMA U NAJDONJOJ ETAŽI

Doc. Ing. Veselin Simović, Zagreb

U ovom radu će biti prikazano kako se i za simetrične okvire, kao što je okvir na sl. 1, može pojednostavniti proračun, tj. kako se može i za takav okvir primijeniti metoda koja je bila prikazana u primjeni na okvire s vertikalnim stubovima (vidi "Građevinar" br. 1 od 1966.).

Najprije će biti dat kratak pregled uobičajenog načina proračuna ovakvog okvira na svim pojednostavnjenjima koja su moguća kod do sada poznatih metoda.

Za bilo kakvo opterećenje okvira sa sl. 1 proračun se može provesti metodom sila. Sistem je  $3n$  puta statički neodređen, pa bi za njegovo rješenje po toj metodi trebalo riješiti sistem

koeficijente jednadžbi elastičnosti. Broj tih koeficijenata dobijemo po formuli:

$$k = \frac{9n(n+1)}{2}$$

Uzeto je u obzir da je  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$  te da simetrične koeficijente treba samo jedanput računati. U ovaj broj koeficijenata su uračunati i pomaci od vanjskog djelovanja na okvir.

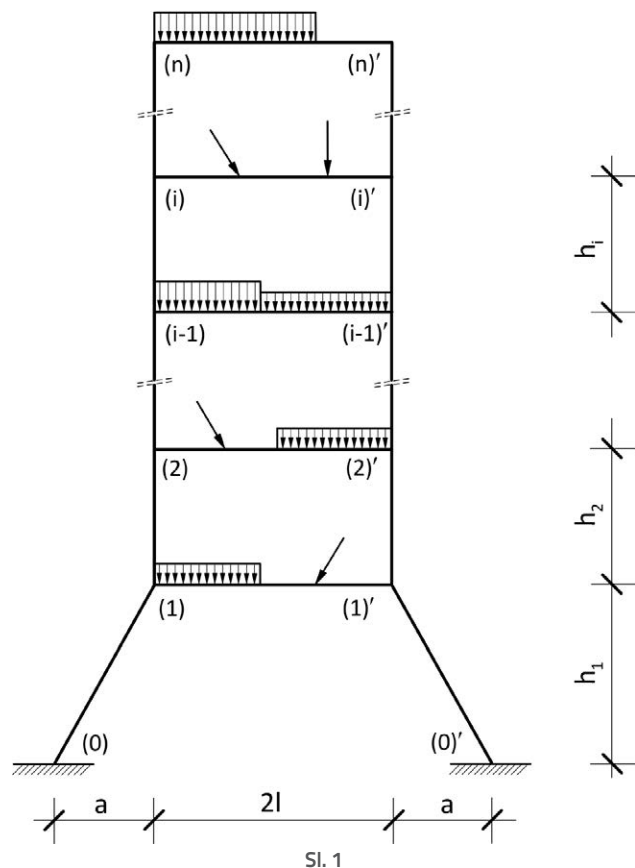
Za okvir sa samo dvije prečke trebalo bi riješiti sistem od šest jednadžbi sa šest nepoznatih, uz prethodno izračunavanje 27 koeficijenata.

Primjena metode deformacija za proračun ovakvog okvira ne daje nam nikakve olakšice, jer i kod ove metode broj nepoznatih je isti –  $3n$ , i to:  $2n$  kuteva zaokreta čvorova i  $n$  nezavisnih relativnih pomaka čvorova.

Čitav proračun možemo pojednostavniti korištenjem simetrije sistema. Rastavljanjem opterećenja na simetričnu i antisimetričnu grupu, što je uvijek moguće, proračun po jednoj i po drugoj metodi možemo skratiti time što ćemo sistem jednadžbi razbiti na dva sistema u kojima je ukupan broj nepoznatih isti, ali se posao bitno skraćuje.

Kod rješavanja po metodi sila, sistem jednadžbi se razbije na dva sistema, i to: jedan sa  $2n$  nepoznatih (slučaj simetričnog opterećenja) i drugi sa  $n$  nepoznatih (slučaj antisimetričnog opterećenja), dok je po metodi deformacija obrnuto: slučaj simetričnog opterećenja daje  $n$  nepoznatih, a za antisimetrično opterećenje taj broj je  $2n$ . Iz tog razloga se postupak proračuna može skratiti kombiniranjem obiju metoda, da se za simetrično stanje opterećenja proračun provede po metodi deformacija, a za antisimetrično – metodom sila. U tom slučaju trebalo bi riješiti dva sistema jednadžbi sa po  $n$  nepoznatih.

Dalje pojednostavljenje proračuna možemo postići primjenom Crosovog postupka za okvire kod kojih je spriječena mogućnost translatornih pomaka čvorova. U tu svrhu okviru sa sl. 1 spriječimo horizontalne pomake čvorova dodavanjem



Sl. 1

od  $3n$  jednadžbi ( $n$  je broj prečki u okviru). Da bi se moglo prići rješavanju jednadžbi, potrebno je prethodno izračunati

\* Smatram svojom dužnošću da obavijestim čitaoce da je prof. dr. Oto Werner prije mene došao do rješenja ovog problema. U trenutku kada sam već htio da odustanem od daljeg traženja rješenja, on mi je savjetovao da nastavim s obzirom da sam bio na pravom putu, što sam i učinio. Tako ovaj rad izlazi pod mojim imenom zahvaljujući rijetkoj nesebičnosti prof. Wenera.

pridržajnih štapova  $s_i$  (sl. 2). U tim pridržajnim štapovima će se pojaviti sile koje spriječavaju pomake čvorova. Iz uvjeta da ove sile moraju biti jednake nuli, opterećujemo okvir sa istim silama suprotnog predznaka.

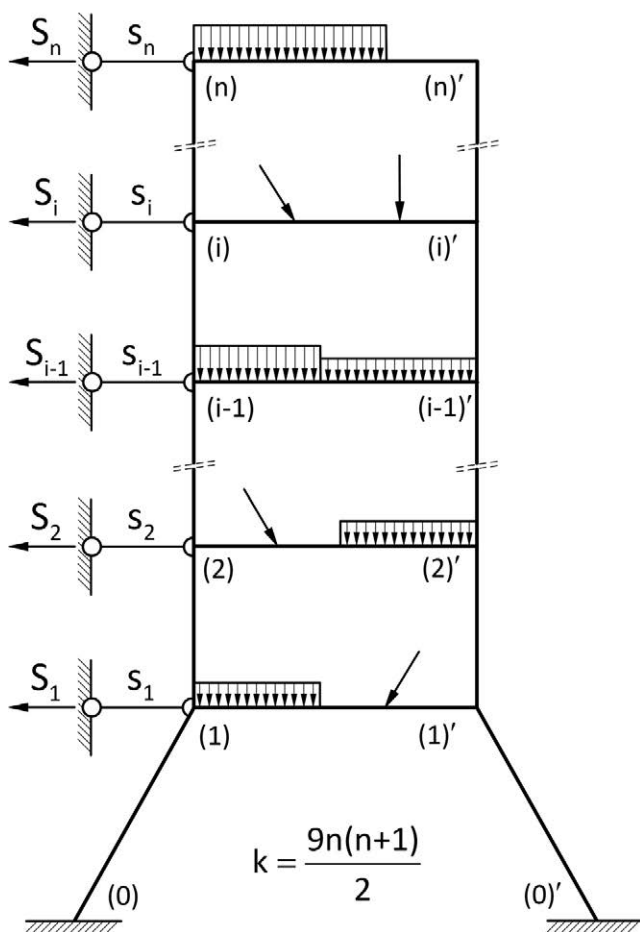
Ovakav okvir riješimo jednostavnim Crosovim postupkom za nepomične okvirne konstrukcije. Sile  $s_i$  u pridržajnim štapovima možemo izračunati iz poznatih momenata u stubovima. Ako riješimo dalje okvir za opterećenje silama  $-S_i$  i to rješenje superponiramo rješenju dobijenom za nepomični sistem, imamo kompletno rješenje ovog okvira.

Istim postupkom koji smo primijenili i kod okvira sa svim vertikalnim stubovima svedemo sistem na poluokvir prema sl. 3, gdje je:

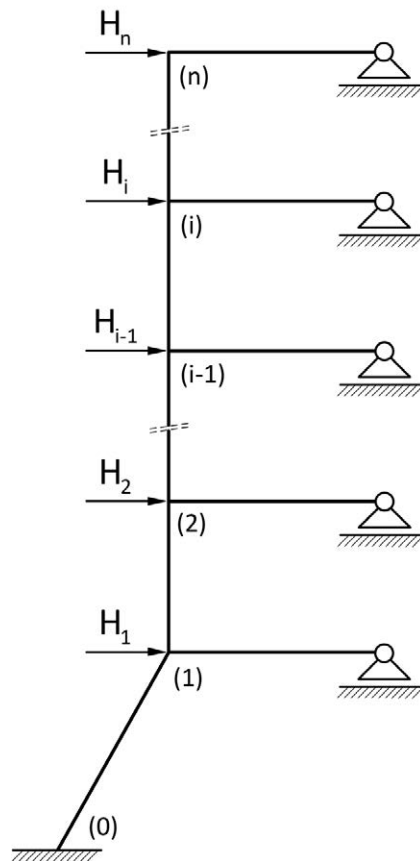
$$H_i = -\frac{S_i}{2}$$

Ovaj poluokvir je statički neodređen onoliko puta koliko ima prečaka, te bi za rješavanje metodom sila trebalo riješiti sistem od  $n$  jednažbi s  $n$  nepoznatih uz prethodno izračunavanje svih koeficijenata kojih će u ovom slučaju biti:

$$k = \frac{n(n+3)}{2}$$



Sl. 2



Sl. 3

Za rješavanje ovog sistema metodom deformacija imali bismo  $2n$  nepoznatih, pa ga tom metodom ne bi imalo smisla rješavati.

No rješavanje ovog poluokvira metodom sila za veći broj prečaka zadaje dosta posla jer se povećava broj jednažbi, a broj koeficijenata raste s kvadratom broja prečki.

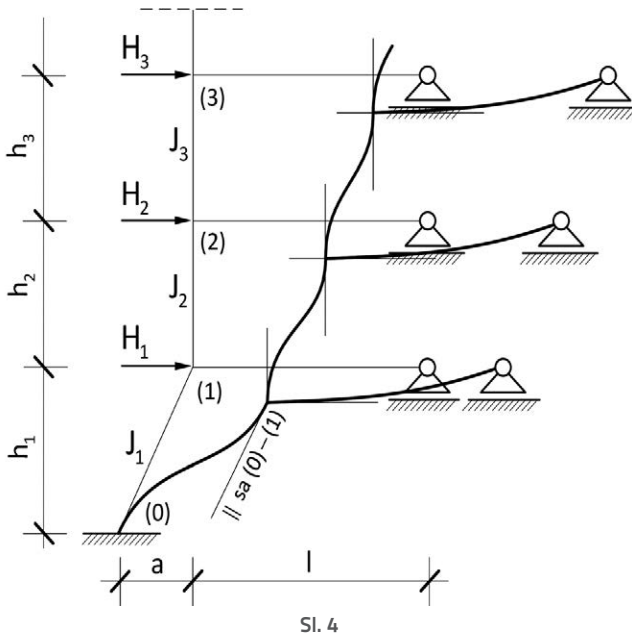
Korištenje do sada poznatih postupaka sukcesivne aproksimacije se ne može bez daljnega primijeniti na ovakav poluokvir. Metoda postepene aproksimacije ili rješenje pomoću sistema tročlanih jednažbi, što se primijenjuju kod poluokvira s vertikalnim stubovima, neće nas ovdje dovesti do ispravnog rješenja bez uzimanja u obzir nekih dodatnih utjecaja. Rješavanje ovog sistema komplicira činjenica da ovdje osim horizontalnih pomaka čvorova imamo i vertikalni pomak koji utiče na momente u čitavom sistemu.

Put za rješenje ovog problema sastoji se u:

1. korištenju spomenutog rješenja za poluokvir s vertikalnim stubovima u svim etažama i horizontalnim prečkama, i
2. uzimanju u obzir vertikalnog pomaka čvorova.

U prvom koraku proračuna promatramo poluokvir kod koga je spriječeno zaokretanje, ali postoji mogućnost translatorskih pomaka čvorova. Deformacija sistema u ovom koraku je prikazana na sl. 4.

Za ovo stanje deformacije, koje smo uzeli kao početno, možemo izračunati momente upetosti u stubovima i



$$\bar{M}_i^g = \frac{h_{i+1}}{2} \sum_{j=i+1}^n H_j \quad \text{ i } \quad \bar{M}_i^d = \frac{h_i}{2} \sum_{j=i}^n H_j$$

gdje su:

$M_i^g$  – moment upetosti štapa (i, i + 1) u čvoru (i) tzv. gornji moment

$M_i^d$  – moment upetosti štapa (i, i – 1) u čvoru (i) tzv. donji moment.

Moment upetosti u najdonjem kosom stubu dobijemo iz izraza:

$$\bar{M}_{10} = -\frac{h_1}{2} \sum_{i=1}^n H_i + V \cdot \frac{a}{2}$$

Ovaj izraz napisan je na temelju slike 5.

U gornjem izrazu nam je nepoznata samo sila V. To je vertikalna komponenta sile u stubu (0 – 1) i možemo je dobiti iz uvjeta raznoteže, jer poluokvir za deformaciono stanje prikazano na sl. 4 možemo statički promatrati kao poluokvir sa zglobom u sredini kosog stuba, kao što je prikazano na sl. 5. Za ovo stanje deformacije u sredini kosog stuba (0 – 1) je tačka infleksije, a prema tome u toj tački je moment jednak nuli, pa možemo smatrati da je na tom mjestu zglob. Za određivanje sile H i V sistem je statički određen.

Momente upetosti za prečke dobijemo iz izraza:

$$\bar{M}_{ip} = 3k_{ip} \frac{\delta}{l}$$

gdje je:

$\delta$  – vertikalni pomak čvorova.

Kako poznajemo momente u kosom stubu za ovo stanje deformacije možemo izračunati i ovaj pomak – kao vertikalni pomak čvora (1), jer su vertikalni pomaci svih čvorova isti s obzirom na usvojenu pretpostavku da ne uzimamo u obzir promjenu dužine elementa.

Pomak  $\delta$  možemo izračunati iz izraza:

$$\delta = \int_0^s m \cdot \frac{Mds}{EI}$$

u kojem su:

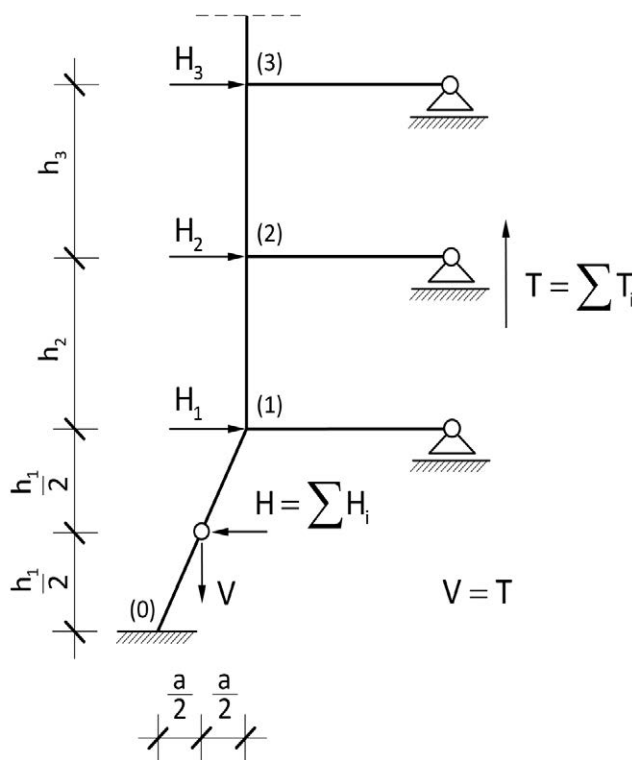
M – moment savijanja u nekom presjeku uslijed vanjskog opterećenja na poluokvir (sile  $H_i$ ) kome je spriječena mogućnost zaokretanja čvorova

m – moment savijanja u istom presjeku za isti sistem uslijed jedinične sile na mjestu i u smjeru pomaka

E – modul elastičnosti

I – moment tromosti presjeka.

Korištenjem redukcionog stavka možemo jednu od veličina m i M tražiti na po volji odabranom sistemu. Kako vrijednosti M već imamo izračunate iz momenta upetosti, to ćemo za traženje momenta m odabrati konzolu.



Sl. 5

prečkama. To će biti početne vrijednosti. Ovdje se javljaju momenti upetosti i u prečkama jer imamo i vertikalni pomak čvorova. Kod poluokvira sa svim vertikalnim stubovima ovaj pomak ne postoji, pa prema tome ne postoje ni početni momenti u prečkama.

U vertikalnim stubovima momente upetosti dobijemo iz izraza:

Na sl. 6a i 6b su prikazani dijagrami momenata za oba stanja opterećenja.

Vrijednost integrala na desnoj strani možemo izračunati množenjem reducirane površine jednog momentnog dijagrama s ordinatom drugog dijagrama u težištu prvog.

Dobijemo:

$$\delta = -\frac{1}{EI_1} \cdot \frac{a \cdot s}{2} \cdot \frac{1}{3} \bar{M}_{10}$$

Zamjenom:  $\frac{EI_1}{s} = k_{10}$  imamo:  $\delta = -\frac{a}{6k_{10}} \bar{M}_{10}$

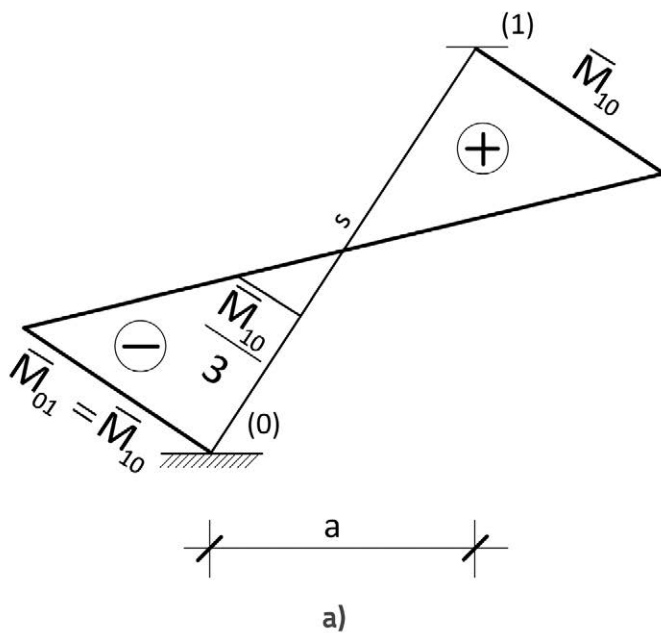
Uvrštavanjem ovog izraza za pomak u izraz za moment upetosti prečke, dobijemo konačno:

$$\bar{M}_{1p} = v_i \bar{M}_{10}$$

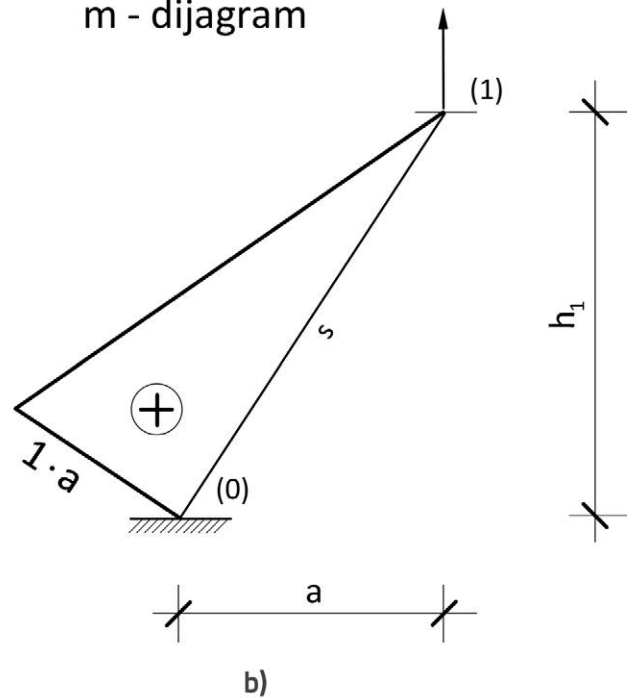
gdje je:

$$v_i = -\frac{a}{2l} \cdot \frac{k_{1p}}{k_{10}}$$

### M - dijagram



### m - dijagram



Sl. 6

Na taj način smo dobili momente upetosti prečaka, izražene direktno pomoću momenta upetosti kosog stuba. Time bi bio i završen prvi korak u rješavanju promatranog poluokvira. Naredni korak je relaksacija čvorova.

#### Relaksacija čvorova (2) do (n)

Za čvorove (2) do (n) relaksacija je ista kao kod okvira sa svim vertikalnim stubovima. Razdjelne koeficijente dobijemo iz izraza:

Za prečku:  $\mu_{ip} = \frac{3k_p}{K_i}$

Za stub (i, i - 1):  $\mu_{i,i-1} = \frac{k_{i-1}}{K_i}$

Za stub (i, i + 1):  $\mu_{i,i+1} = \frac{k_{i+1}}{K_i}$

$K_i$  je krutost čvora (i), a dobije se sumiranjem krutosti svih štapova priključenih u tom čvoru:

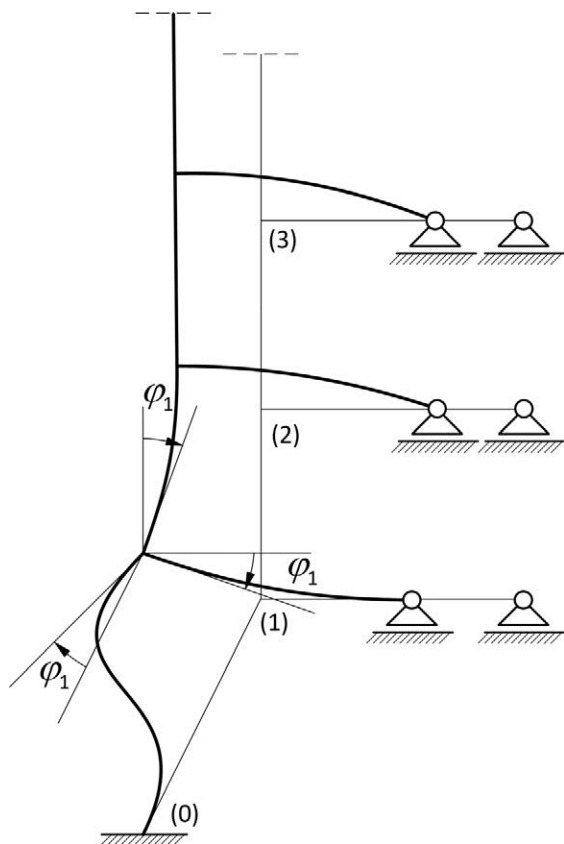
$$K_i = 3k_{ip} + k_i + k_{i+1}$$

#### Relaksacija čvora (1)

Kod relaksacije čvora (1) imamo još i translatorne pomake, i to: horizontalne i vertikalni. Od vertikalnog pomaka nastaje i dodatna vertikalna sila koja je jednaka sumi poprečnih sila u svim prečkama za ovo stanje.

Deformaciono stanje pri relaksaciji čvora (1) prikazano je na sl. 7.

Pored momenata koji se pri relaksaciji čvora (1) javljaju u štapovima priključnim u tom čvoru, imamo i dodatne



Sl. 7

$M_{10}$  – momenat kosog stuba u čvoru (1) nastao uslijed relaksacije čvora (1)

$\Delta T$  – dodatna vertikalna sila nastala uslijed relaksacije čvora (1)

$\Delta V$  – vertikalna komponenta dodatne sile u kosom stubu (0 – 1)

$$\Delta V = -\Delta T$$

Horizontalna sila u stubu (0 – 1) uslijed relaksacije čvora (1) je jednaka nuli, jer nemamo drugih horizontalnih sila s kojima bi ona mogla biti u ravnoteži.

Iz statičkog uvjeta dobijamo:

$$\Delta T \cdot l = M_{10} \quad \Delta T = \frac{M_{10}}{l} = -\Delta V$$

Na taj način smo dobili vezu između momenta i vertikalne sile u čvoru (1) stuba (0 – 1), pa smo u mogućnosti da izrazimo kut zaokreta i pomak kao funkciju jedne veličine, a prema tome da izrazimo i pomak  $\delta_1$  pomoću kuta zaokreta  $\varphi_1$ .

Za traženje kuta zaokreta i pomaka opet ćemo koristiti redukcionu stavak (sl. 9).

Na sl. 9a je dijagram momenata na kosom stubu (0 – 1) uslijed zaokreta čvora (1) za  $\varphi_1$ , a na sl. 9b i 9c su dijagrami momenata na stubu (0 – 1) uslijed jediničnih sila u smjeru i na mjestu traženih pomaka. Stub je u ovom slučaju promatran kao konzola.

Iz nacrtanih momenata dijagrama dobijamo za kut  $\varphi_1$ :

$$EI_1 \varphi_1 = M_{10} \cdot s \cdot 1 + \frac{M_{10} \cdot a}{l} \cdot \frac{s}{2} \cdot 1,$$

a odatle sređivanjem dalje:

$$EI_1 \varphi_1 = \frac{M_{10} \cdot s}{2l} (2l + a).$$

Za pomak  $\delta_1$  dobijemo:

$$EI_1 \delta_1 = - \left( M_{10} \frac{a \cdot s}{2} \cdot 1 + \frac{a \cdot s}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{M_{10}}{l} \cdot a \right)$$

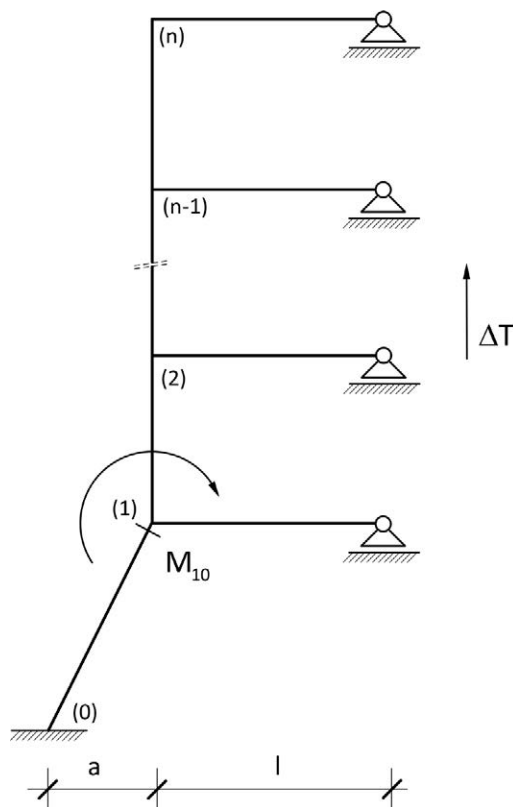
i konačno:

$$EI_1 \delta_1 = -M_{10} \frac{s}{6l} \cdot a (3l + 2a).$$

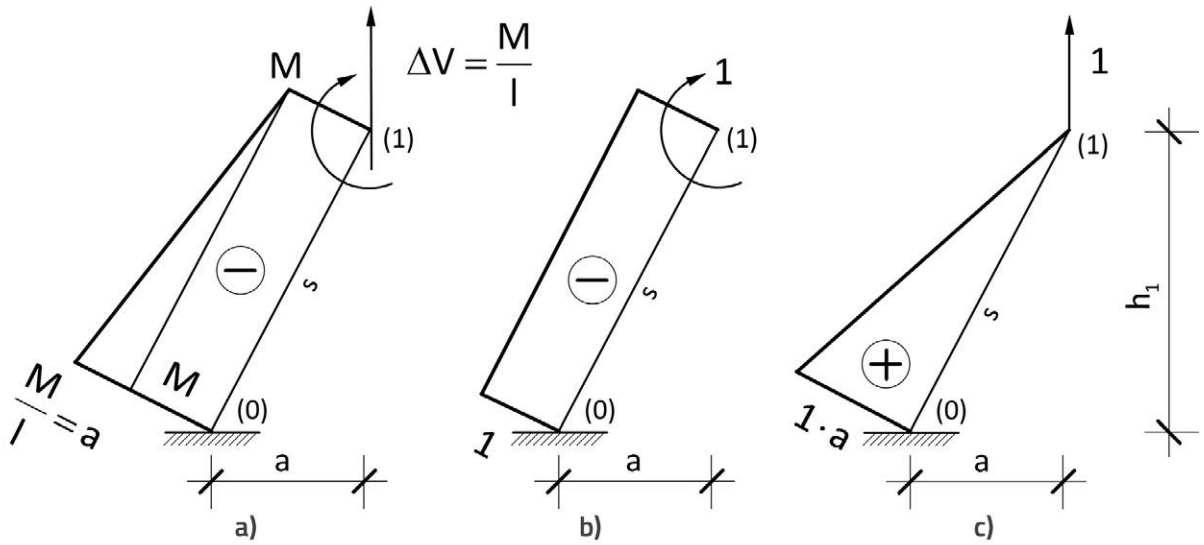
Iz izraza za kut  $\varphi_1$ , i pomak  $\delta_1$  možemo dobiti vezu između ovih veličina. Pomak  $\delta_1$ , izražen pomoću kuta  $\varphi_1$  glasi:

$$\delta_1 = -\frac{a}{3} \cdot \frac{3l + 2a}{2l + a} \varphi_1$$

Vezu između pomaka i kuta zaokreta možemo dobiti i na drugi način: postavljanjem jednadžbe rada, koja se u metodi deformacija koristi kod pomičnih sistema. Za to je dovoljno ako promatramo sistem prema sl. 10a. Vezu koju dobijemo između vertikalnog pomaka i kuta zaokreta čvora (1) za sistem na sl. 10a važi i za naš poluokvir.



Sl. 8



Sl. 9

Na sl. 10b je nacrtani sistem pretvoren u kinematski lanac kome smo dali virtualni pomak čvora u vertikalnom smjeru. Uzet je jedinični pomak.

Primjenom principa virtualnog rada dolazimo do jednadžbe iz koje dobijamo traženu vezu.

Jednadžba virtualnog rada glasi:

$$-M_{01} \cdot \bar{\Psi}_{10} - M_{10} \cdot \bar{\Psi}_{10} - M_{1p} \cdot \bar{\Psi}_{1p} + M \cdot \bar{\Psi}_{1p} = 0$$

Kako je:

$$M = -M_{1p} - M_{10}$$

imat ćemo:

$$M_{01} \cdot \bar{\Psi}_{10} + M_{10} \bar{\Psi}_{10} - M_{10} \bar{\Psi}_{1p} = 0$$

U gornju jednadžbu uvrštavamo slijedeće:

$$M_{10} = 4k_{10} \varphi_1 + 6k_{10} \Psi_{10}$$

$$M_{01} = 2k_{10} \varphi_1 + 6k_{10} \Psi_{10}$$

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{a}; \quad \bar{\Psi}_{1p} = -\frac{1}{l}; \quad \Psi_{10} = \frac{\delta_1}{a}$$

te dobijemo:

$$(a + l) \cdot M_{10} + l \cdot M_{01} = 0,$$

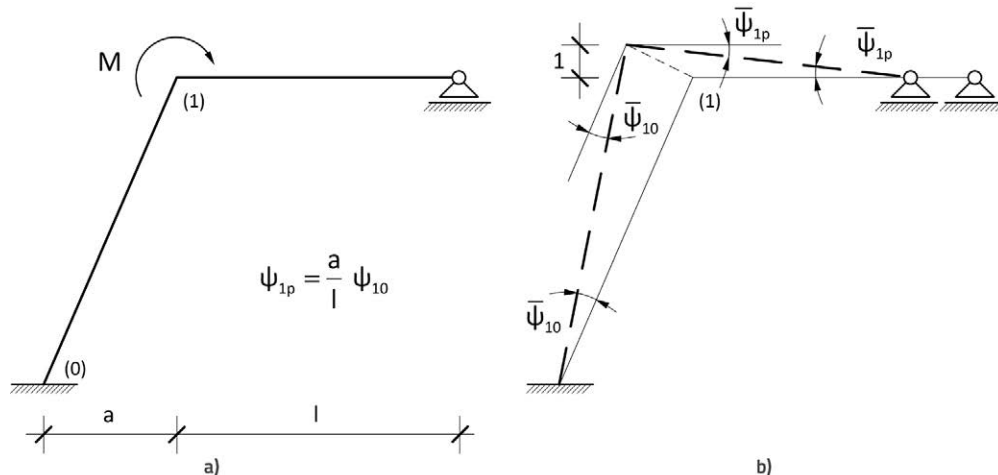
a odatle dalje:

$$a \cdot \left( 4k_{10} \varphi_1 + 6k_{10} \frac{\delta_1}{a} \right) + l \cdot \left( 6k_{10} \varphi_1 + 12k_{10} \frac{\delta_1}{a} \right) = 0$$

i konačno:

$$\delta_1 = -\frac{a}{3} \cdot \frac{3l + 2a}{2l + a} \varphi_1$$

To je isti izraz koji smo i prije dobili za vezu između pomaka i kuta zaokreta čvora.



Sl. 10

Koristeći se ovom vezom u mogućnosti smo da momente štapova izrazimo kao funkciju samo kuta  $\varphi_1$ . Izraze za te momente dobijemo iz općih izraza za momente koje koristimo kod metode deformacija. Za čvorne momente štapova priključenih u čvoru (1) dobijemo:

$$\begin{aligned} M_{10} &= 4k_{10} \varphi_1 + 6k_{10} \Psi_{10} \\ M_{12} &= k_{12} \varphi_1 \\ M_{1p} &= 3k_{1p} \varphi_1 + 3k_{1p} \Psi_{10} \end{aligned}$$

U gornje izraze možemo uvesti slijedeće zamjene:

$$\begin{aligned} \Psi_{10} &= \frac{\delta_1}{a} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3l+2a}{2l+a} \cdot \varphi_1 \\ \Psi_{1p} &= \frac{\delta_1}{l} = \frac{a}{3l} \cdot \frac{3l+2a}{2l+a} \cdot \varphi_1 \end{aligned}$$

Izraženi su kutevi zaokreta štapova s kutom zaokreta čvora. Nakon uvođenja ovih zamjena u izraze za momente, te nakon njihova sređivanja, dobijemo konačno:

$$\begin{aligned} M_{10} &= \alpha \cdot k_{10} \cdot \varphi_1 \\ M_{12} &= k_{12} \cdot \varphi_1 \\ M_{1p} &= \beta \cdot k_{1p} \cdot \varphi_1. \end{aligned}$$

Krutost stuba (1–2) je ostala ista kao za poluokvir s vertikalnim stubovima u svim etažama, dok za ostale štapove imamo ove krutosti:

Za štap (0–1):  $\alpha \cdot k_{10}$

Za prečku 1p:  $\beta \cdot k_{1p}$ .

U gornjim izrazima su:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2l}{2l+a} \\ \beta &= 2 \cdot \frac{3l^2+3al+a^2}{2l^2+al} \end{aligned}$$

Iz navedenih izraza možemo dobiti razdjelne koeficijente za čvor (1):

$$\begin{aligned} \mu_{10} &= \frac{\alpha k_{10}}{\alpha k_{10} + k_{12} + \beta k_{1p}} \\ \mu_{12} &= \frac{k_{12}}{\alpha k_{10} + k_{12} + \beta k_{1p}} \\ \mu_{1p} &= \frac{\beta k_{1p}}{\alpha k_{10} + k_{12} + \beta k_{1p}} \end{aligned}$$

Prenosni koeficijenti za vertikalne štapove su jednaki – 1, isto kao kod poluokvira s vertikalnim stubovima u svim etažama. Treba osim toga da odredimo prenosni koeficijent od čvora (1) na čvor (0). Ovaj koeficijent ćemo dobiti iz odnosa  $M_{01}$  i  $M_{10}$ . Izraz za momenat  $M_{10}$  već imamo, a za  $M_{01}$  će biti:

$$M_{01} = 2k_{10} \varphi_1 - 6k_{10} \Psi_{10}.$$

Nakon uvrštavanja izraza za  $\Psi_{10}$  i sređenja, dobijemo:

$$M_{01} = -2k_{10} \cdot \frac{l+a}{2l+a} \varphi_1,$$

ili izražen pomoću momenta  $M_{10}$ :

$$M_{01} = -\frac{l+a}{l} \cdot M_{10}.$$

Odavde dobijemo prenosni koeficijent od čvora (1) na čvor (0):

$$\chi_{10} = \frac{M_{01}}{M_{10}} = -\frac{l+a}{l}.$$

Uslijed kuta zaokreta čvora (1), osim u prečki priključenju u tom čvoru, nastaju momenti i u ostalim prečkama, koje dobijemo iz izraza:

$$M_{ip} = 3k_{ip} \frac{\delta_1}{l} \quad i > 1.$$

Nakon uvrštavanja izraza za  $\delta_1$  koji smo ranije dobili, imamo konačno:

$$M_{ip} = \frac{a}{l} \cdot \frac{3l+2a}{2l+a} \cdot k_{ip} \cdot \varphi_1 = \gamma \cdot k_{ip} \cdot \varphi_1.$$

Interesira nas veza između momenata u prečkama i momenta  $M_{10}$  kako bismo mogli dobiti prenosni koeficijent od ovog momenta na momente u prečkama.

Izražavajući momente u prečkama s momentom  $M_{10}$  dolazimo do izraza:

$$M_{ip} = \frac{3al+2a^2}{2l^2} \cdot \frac{1}{k_{10}} \cdot k_{ip} \cdot M_{10},$$

odnosno ako uvedemo oznaku:

$$\eta = \frac{3al+2a^2}{2l^2} \cdot \frac{1}{k_{10}}$$

dobijemo:

$$M_{ip} = \eta \cdot k_{ip} \cdot M_{10}$$

Odavde izračunamo prenosni koeficijent od momenta  $M_{10}$  na prečke uslijed relaksacije čvora (1).

$$X_{ip} = \eta \cdot k_{ip}.$$

Mogli smo tražiti koeficijent koji nam daje momente u prečkama u zavisnosti od ukupnog neuravnoteženog momenta u čvoru (1). No to bi unekoliko kompliciralo iteracioni postupak i preglednost proračuna.

Sumiranjem izraza za momente koje dobijemo uslijed zaokreta čvorova sa momentima pune upetosti, dobijamo konačne izraze za čvorne momente svih štapova.

a) Za čvor (1):

$$\begin{aligned} M_{10} &= \alpha \cdot k_{10} \cdot \varphi_1 + \bar{M}_{10} \\ M_{12} &= k_{12} \cdot \varphi_1 - k_{12} \cdot \varphi_2 + \bar{M}_{12} \\ M_{1p} &= \beta \cdot k_{1p} \cdot \varphi_1 + \bar{M}_{1p}. \end{aligned}$$



b) Za ostale čvorove:

$$M_{i,i-1} = k_{i,i-1} \cdot \varphi_1 - k_{i,i-1} \cdot \varphi_{i-1} + \bar{M}_{i,i-1}$$

$$M_{i,i+1} = k_{i,i+1} \cdot \varphi_1 - k_{i,i+1} \cdot \varphi_2 + \bar{M}_{i,i+1}$$

$$M_{1p} = 3 \cdot k_{1p} \cdot \varphi_1 + \gamma k_{1p} \cdot \varphi_1 + \bar{M}_{1p}$$

Koeficijenti  $\alpha, \beta, \gamma$  su bezdimenzionalne veličine, a zavise o veličinama  $a$  i  $l$  (sl. 4). Izrazi za ove koeficijente su već dati.

Na osnovu izvedenih izraza moguće je promatrani poluokvir proračunati postepenom aproksimacijom ili postavljanjem jednadžbi u kojima su nepoznate veličine kutevi zaokreta čvorova. Imamo toliko nepoznatih koliko i u slučaju da sistem rješavamo metodom sila. Prednost ove metode je u jednostavnijem i bržem izračunavanju koeficijenata u jednadžbama.

Sistem jednadžbi za poluokvir sa četiri prečke izgleda ovako:

$\varphi_4$	$\varphi_3$	$\varphi_2$	$\varphi_1$	N
$3k_{4p} + k_{34}$	$-k_{34}$		$-\gamma k_{4p}$	$-\bar{M}_4$
$-k_{34}$	$3k_{3p} + k_{23} + k_{34}$	$-k_{23}$	$-\gamma k_{3p}$	$-\bar{M}_3$
	$-k_{23}$	$3k_{2p} + k_{12} + k_{23}$	$-\gamma k_{2p} - k_{12}$	$-\bar{M}_2$
		$-k_{12}$	$\alpha k_{10} + k_{12} + \beta k_{1p}$	$-\bar{M}_1$

Ove jednadžbe imaju isto značenje kao i jednadžbe metode deformacija. Vidimo da u ovom slučaju matrica koeficijenata nije simetrična, što izaziva izvjesne teškoće kod rješavanja jednadžbi (veći utrošak vremena). Ali to se kompenzira činjenicom da ima izvjestan broj koeficijenata u matrici koji su

jednaki nuli, što s druge strane ubrzava postupak rješavanja jednadžbi.

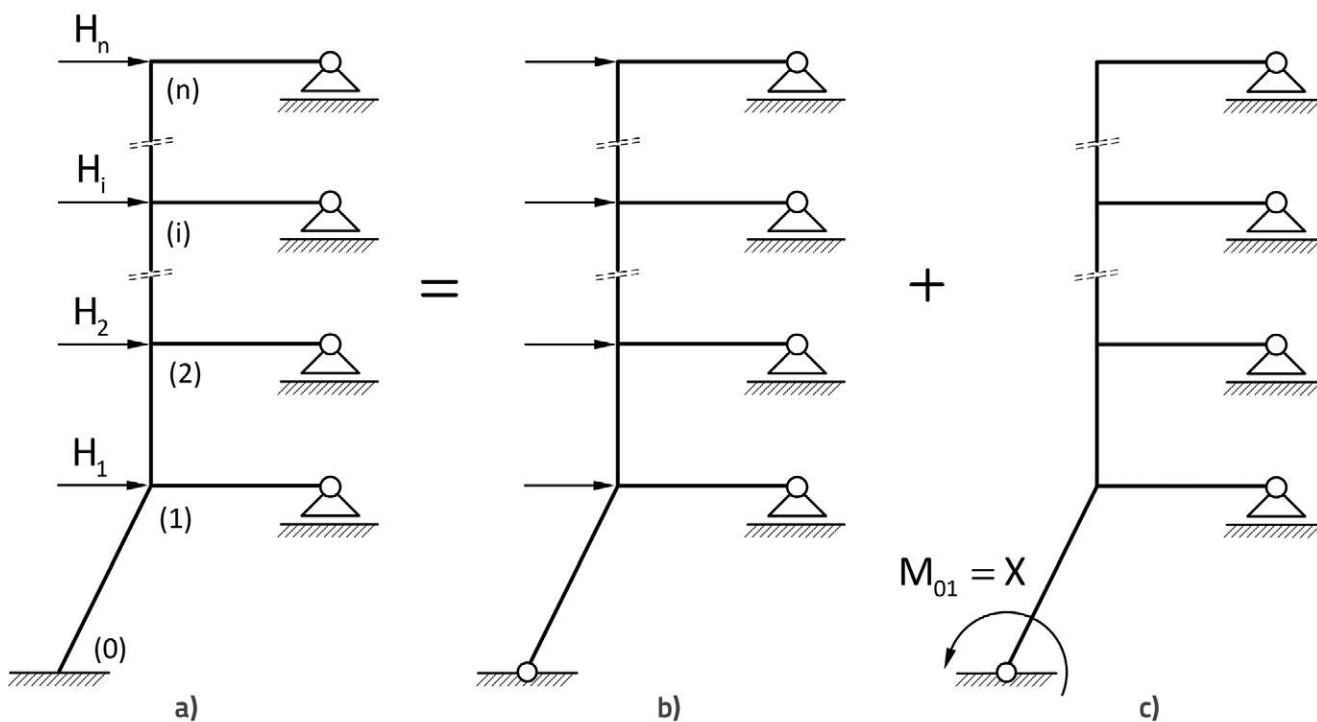
Analizom prikazanog načina proračuna poluokvira s kosim stubom u najdonjoj etaži, lako uviđamo da je poluokvir sa svim vertikalnim stubovima specijalni slučaj ovog kog mi promatramo. Dovoljno je da u sve izraze za momente i koeficijente uvrstimo  $a = 0$ . U tom slučaju dobijamo:

$$v = 0; \alpha = 1; \beta = 3; \gamma = 0; \eta = 0.$$

Izrazi za momente postaju isti kao i oni koje smo imali za slučaj polukvira sa svim vertikalnim stubovima. Isto se događa i s prenosnim i razdjelnim koeficijentima. Prenosni koeficijent  $\chi_{10}$  postaje  $-1$ , a prenosni koeficijenti  $\chi_{ip}$  nestaju jer je  $\eta = 0$ . Nestaju i momenti upetosti u prečkama ( $v_i = 0$ ).

Sistem jednadžbi pretvara se u simetrični sistem tročlanih jednadžbi, kakav imamo kod poluokvira s vertikalnim stubovima, što je prikazano u već citiranom članku.

Poluokvir, koji je predmet ovog rada, možemo proračunati primjenjujući izravno postupak za proračun poluokvira s vertikalnim



Sl. 11



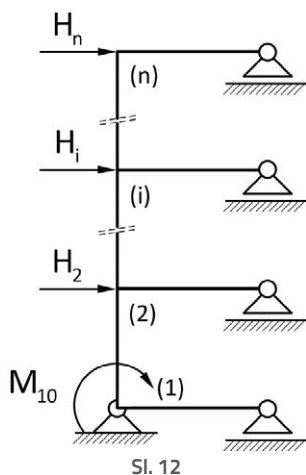
stubovima u svim etažama. To postizemo kombinacijom metode sila s postupkom postepene aproksimacije.

Okviru na sl. 11a možemo statičku neodređenost smanjiti jedanput, ako upeti ležaj (0) pretvorimo u zglojni. Na taj način smo omogućili kut zaokreta u ležaju (0). Iz uvjeta da taj kut mora biti jednak nuli, možemo odrediti momenat na tom mjestu.

Konačno rješenje dobijamo superponiranjem vrijednosti sa sl. 11b i 11c.

Poluokvir kod koga je u ležaju (0) zglob možemo direktno riješiti postupkom koji primjenjujemo za okvir sa svim vertikalnim stubovima. Ovo iz razloga što već odmah znamo konačnu vrijednost momenta u čvoru (1) štapa (0 – 1). Za određivanje tog momenta je naš sistem statički određen. Tu činjenicu smo koristili i u već pokazanom postupku kod traženja momenata upetosti štapa (0 – 1).

U ovom slučaju poluokvir možemo proračunati kao sistem pokazan na sl. 12.



Sl. 12

Ova mogućnost nam pokazuje put za rješavanje poluokvira i na drugi način. Kod ovog drugog postupka se problem sastoji u traženju momenta u čvoru (0). Taj momenat ćemo smatrati prekobrojnomo veličinom u smislu metode sila.

Označimo li taj momenat sa X možemo ga izračunati iz jednadžbe elastičnosti za ležaj (0), koja glasi:

$$x \delta_{xx} + \delta_{xv} = 0$$

U toj jednadžbi je:

$\delta_{xx}$  – kut zaokreta u ležaju (0) uslijed jediničnog momenta na tom mjestu

$\delta_{xv}$  – kut zaokreta u ležaju (0) uslijed vanjskog djelovanja na poluokvir.

Obadvije ove veličine tražimo na (n-1) puta statički neodređenom sistemu, jer smo ubacili zglob u ležaj (0).

Da bismo pronašli veličine  $\delta_{xx}$  i  $\delta_{xv}$ , a to znači i veličinu X, tj. momenat u ležaju (0), postupamo na ovaj način:

Najprije riješimo poluokvir prikazan na sl. 11b, za koji smo već rekli kako se može riješiti. Iz poznatih momenata možemo

izračunati kut zaokreta  $\delta_{xv}$ , pri čemu ćemo se koristiti redukcionim stavkom.

Nakon toga riješimo zglobni poluokvir (sl. 11c) za opterećenje jediničnim momentom u smjeru i na mjestu prekobrojne veličine X. Razumije se da se i za ovo stanje opterećenja može proračun provesti kao za poluokvir sa svim vertikalnim stubovima, jer konačnu veličinu momenta u čvoru (1) štapa (0 – 1) možemo odmah izračunati. Iz momentnog dijagrama uz korištenje redukcionog stavka izračunamo veličinu  $\delta_{xx}$ .

Kad imamo veličinu X, s njom množimo konačne vrijednosti čvornih momenata od jediničnog momenta te dobijemo rješenje poluokvira za opterećenje prema sl. 11c.

Superpozicijom ovog rješenja s rješenjem za opterećenje prema sl. 11b dobijemo rješenje za okvir prikazan na sl. 11a. Ovo rješenje se poklapa s rješenjem koje dobijemo direktnim postupkom, što će se vidjeti i iz priloženog primjera.

U usporedbi sa postupkom kod kojeg rješavamo poluokvir direktno postepenim aproksimacijama, ovaj postupak je znatno duži, jer moramo dva puta provoditi iteracioni postupak a osim toga treba i izračunati prekobrojni veličinu po metodi sila. No i ovaj postupak u poređenju s običnim postupkom po metodi sila vodi mnogo brže do rezultata. Ono zbog čega je ovaj postupak važno istaći je činjenica da kod proračuna po njemu ne treba pamtit i skoro nikakve formule ili tražiti pomoć priručnika u kojima su dati izrazi za koeficijente ili momente upetosti.

Dovoljno je znati da je krutost prečke  $3 k_{ip}$ , a krutost stuba  $k_{ik}$ , te iz tih veličina izračunati razdjelne koeficijente, dok su prenosni koeficijenti –1.

Opisane postupke proračuna ćemo ilustrirati jednim primjerom.

## Primjer

Zadan je poluokvir sa dimenzijama i opterećenjem prema sl. 13.

### 1. Proračun po direktnom postupku

Najprije ćemo proračunati sve koeficijente koji su potrebni za provedbu postupka sukcesivne aproksimacije. Isti koeficijenti su nam potrebni ako hoćemo rješavati sistem jednadžbi.

a) Pomoćni koeficijenti

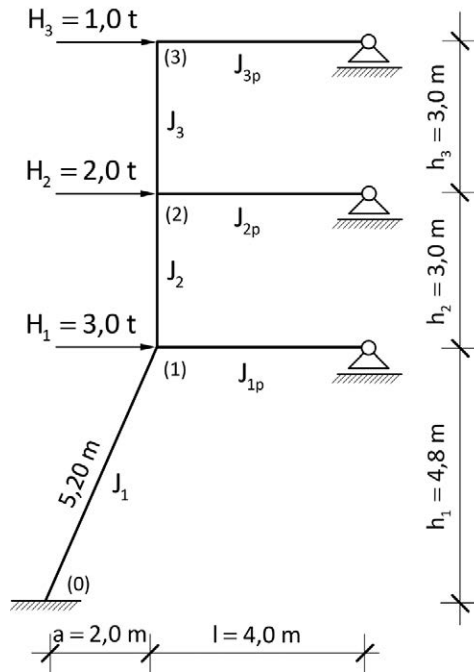
$$v_i = v_1 = v_2 = v_3 = -\frac{a}{2l} \cdot \frac{k_{ip}}{k_{i0}} = -0,650$$

$$\alpha = \frac{2l}{2l + a} = 0,80$$

$$\beta = 2 \cdot \frac{3l^2 + 3al + a^2}{2l^2 + al} = 3,80$$

$$\gamma = \frac{a}{l} \cdot \frac{3l + 2a}{2l + a} = 0,80$$

$$\eta = \frac{3al + 2a^2}{2l^2} \cdot \frac{1}{k_{i0}} = 3,466$$



$$J_2 = J_3 = J_0$$

$$J_1 = 1,5 J_0$$

$$J_{1p} = J_{2p} = J_{3p} = 3J_0$$

$$K_{10} = \frac{1,5}{5,2} = 0,2885$$

$$K_{12} = K_{23} = \frac{1}{3} = 0,3333$$

$$K_p = \frac{3}{4} = 0,7500$$

Sl. 13

b) Razdjelni koeficijenti

$$\mu_{10} = 0,068$$

$$\mu_{12} = 0,098$$

$$\mu_{1p} = 0,834$$

$$\mu_{21} = \mu_{23} = 0,114$$

$$\mu_{2p} = 0,772$$

$$\mu_{32} = 0,129$$

$$\mu_{3p} = 0,871.$$

c) Prenosni koeficijenti

$$\chi_{10} = -\frac{l+a}{l} = -1,50$$

$$\chi_{2p} = \chi_{3p} = \eta k_{2p} = 2,60$$

d) Početni momenti

Vrijednost početnih momenata (momenti potpune upetosti) uz mogućnost translatornih pomaka izračunavamo na opisani način.

$$V = \frac{1 \cdot 8,4 + 2 \cdot 5,4 + 3 \cdot 2,4}{5} = 5,28 \text{ t}$$

$$ZH_1 = 6,0 \text{ t}$$

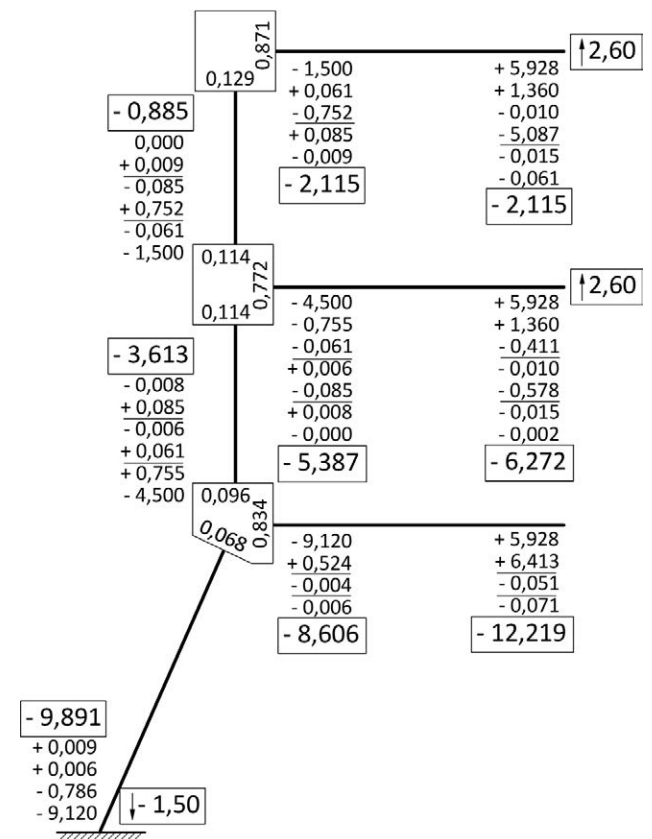
$$\bar{M}_{10} = \bar{M}_{01} = -6,0 \cdot 2,4 + 5,28 \cdot 1,0 = -9,12 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_{12} = \bar{M}_{21} = -4,50 \text{ tm}$$

$$\bar{M}_{23} = \bar{M}_{32} = -1,50 \text{ tm}$$

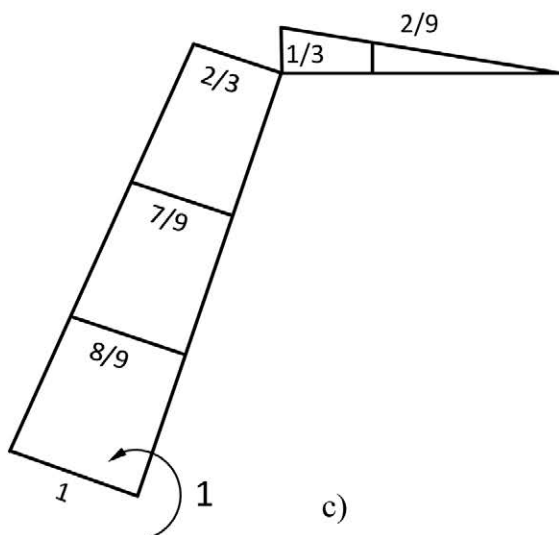
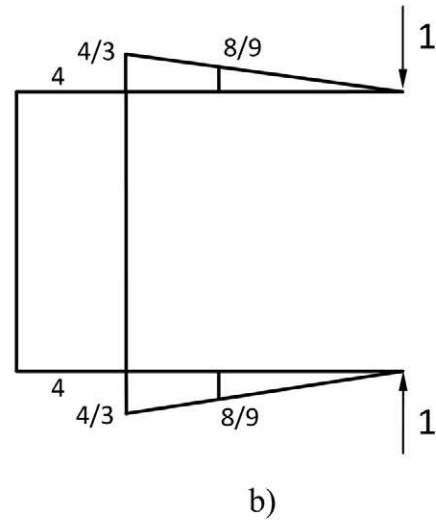
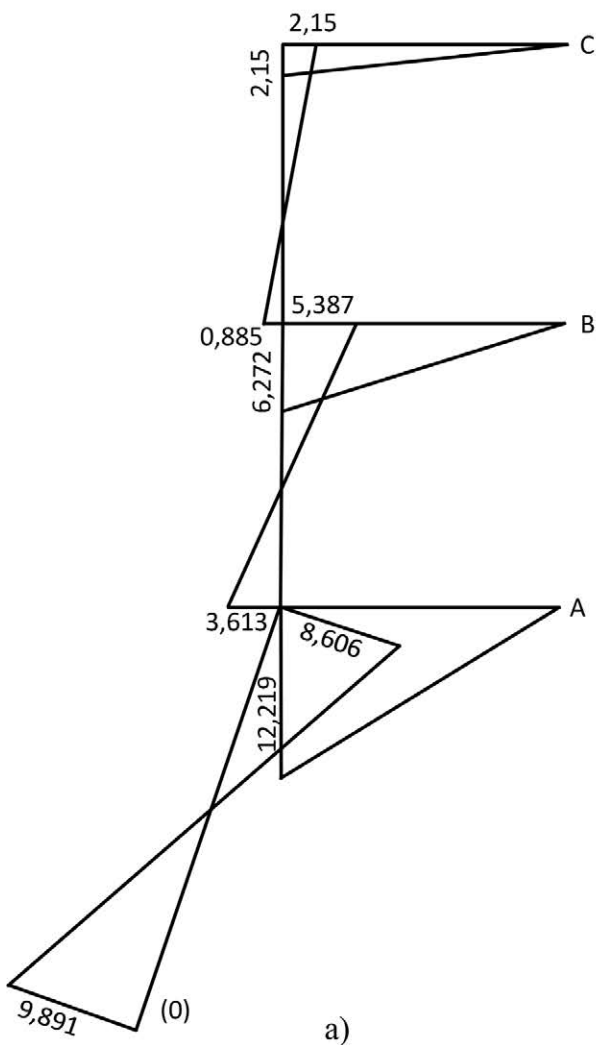
$$\bar{M}_{1p} = \bar{M}_{2p} = \bar{M}_{3p} = v_1 \bar{M}_{10} = 5,928 \text{ tm}.$$

Na sl. 15a je nacrtan dijagram momenata. Da je taj dijagram tačan pokazuju kontrole deformacija koje su pokazane na sl. 15. Kontrolirano je: primicanje ležajeva AB ( $\delta_{AB}$ ) i BC ( $\delta_{BC}$ ) te kut zaokreta u upetom ležaju  $\phi_0$ . Na sl. 15b je momentni dijagram od



Sl. 14

Postupak sukcesivne aproksimacije prikazan je na sl. 14.



$$EJ_0 \delta_{AB} \left| \begin{array}{l} + \frac{12,219 - 6,272}{2} \cdot 4 \cdot \frac{8}{9} = 10,57 \\ - \frac{5,387 - 3,613}{2} \cdot 3 \cdot 4 = -10,64 \\ \hline EJ_0 \delta_{AB} = -0,07 = 0 \end{array} \right.$$

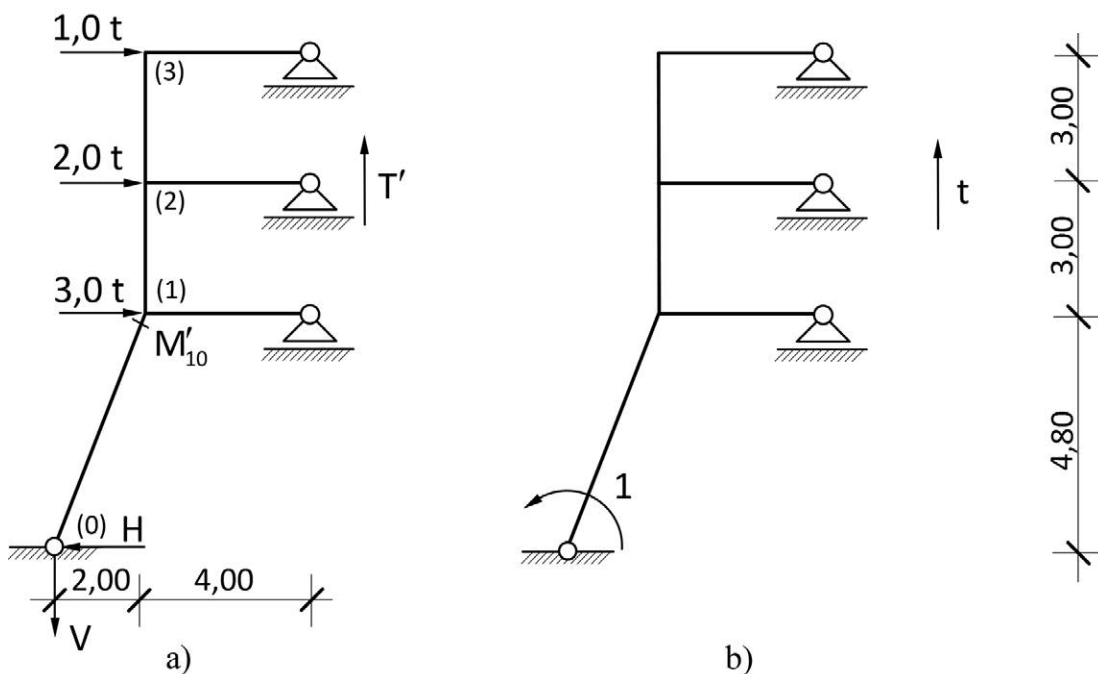
$$EJ_0 \delta_{BC} \left| \begin{array}{l} + \frac{6,272 - 2,115}{2} \cdot \frac{8}{9} = 7,37 \\ - \frac{2,115 - 0,885}{2} \cdot 3 \cdot 4 = -7,38 \\ \hline EJ_0 \delta_{BC} = -0,01 = 0 \end{array} \right.$$

$$EJ_0 \varphi_0 \left| \begin{array}{l} - \frac{12,219 \cdot 4}{2} \cdot \frac{8}{9} = -5,43 \\ - \frac{8,606 \cdot 5,2}{2} \cdot \frac{7}{9} = -17,40 \\ + \frac{9,891 \cdot 5,2}{2} \cdot \frac{8}{9} = +22,86 \\ \hline EJ_0 \varphi_0 = +0,03 = 0 \end{array} \right.$$

Sl. 15

jediničnih sila, koji služi za kontrolu pomaka  $\delta_{AB}$  i  $\delta_{BC}$ , a na sl. 15c je dijagram od jediničnog momenta za kontrolu kuta zaokreta  $\phi_0$ . Za računanje deformacija je korišten redukcionni stavak. Dijagrami na sl. 15b i 15c su reducirani u omjeru momenata tromosti štapova. Kontrole pokazuju tačnost rezultata dobijenih ovim postupkom.

Koristeći redukcionni stavak iz dijagrama momenata naći ćemo veličine  $\delta_{xx}$  i  $\delta_{xv}$ . I u jednom i u drugom slučaju uzimamo dijagrame samo na prostoj gredi koja se sastoji iz kosog stuba i prve prečke. Dijagrami i proračun kuteva  $\delta_{xx}$  i  $\delta_{xv}$  dati su na sl. 18. Dijagrami su ucrtani kao da su štapovi u jednom pravcu.



Sl. 16

**2. Proračun po kombiniranom postupku**

Najprije provodimo proračun za okvir (n-1) puta statički neodređen, opterećen zadanim silama (sl. 16a). Iz statičkih uvjeta odredimo veličine: H, V i  $M_{10}'$ .

$$H = \sum H_i = 6,0 \text{ t}$$

$$V = \frac{1 \cdot 10,8 + 2 \cdot 7,8 + 3 \cdot 4,8}{6} = 6,80 \text{ t}$$

$$M_{10}' = -H \cdot h_1 + V \cdot a = -15,20 \text{ tm}.$$

Razdjelne koeficijente već imamo izračunate, jer će za čvor (2) i (3) biti kao i kod direktnog postupka, dok je za čvor (1) isto kao za čvor (3) s obzirom da su iste krutosti štapa (1 – 2) i prečke, a štap (0 – 1) u ovom slučaju ima krutost jednaku nuli. Iteracioni postupak za ovaj slučaj opterećenja pokazan je na sl. 17a.

Za slučaj opterećenja zglobnog poluokvira jediničnim momentom u ležaju (0) (sl. 16b) dobijemo:

$$M_{10}'' = m_{10} X$$

$$m_{10} = -t \cdot l; \quad t = -\frac{1}{6}; \quad m_{10} = \frac{2}{3} = 0,666.$$

Postupak iteracije za ovaj slučaj opterećenja prikazan je na sl. 17b.

Sada možemo izračunati moment u ležaju (0). On će biti:

$$M_{01}'' = X = -\frac{\delta_{xv}}{\delta_{xx}} = 9,891 \text{ tm}.$$

Vidimo da je ta vrijednost ista kao i ona dobijena direktnim proračunom.

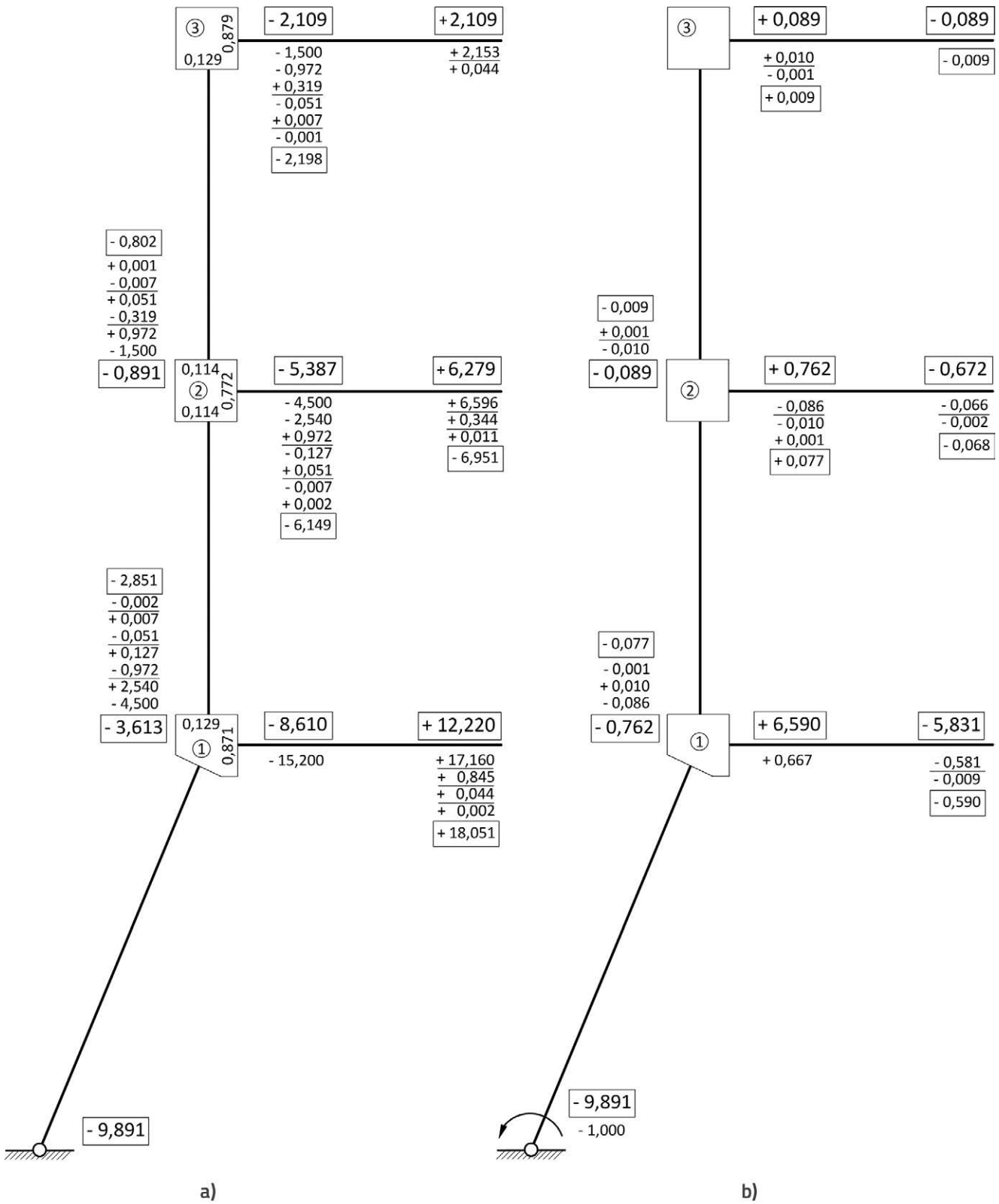
Čvorne momente u svim štapovima, uslijed momenta X, dobit ćemo kad vrijednost momenata u ležaju (0) množimo s vrijednošću X. Te veličine su napisane na sl. 17b, debelo uokvirene.

Konačne vrijednosti čvornih momenata dobijamo superpozicijom stanja na slikama 17a i 17b.

$$M_{ik} = M_{ik}' + M_{ik}''.$$

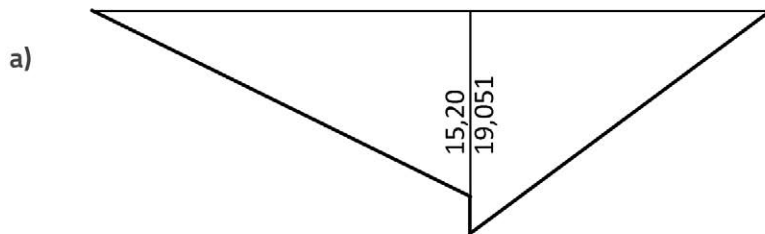
Veličine  $M_{ik}'$  su izračunate na sl. 17a. Konačne vrijednosti momenata u čvorovima upisane su na sl. 17a, u debelim okvirima.

Vrijednosti dobijene ovim putem se jako dobro slažu s vrijednostima koje smo dobili prvim postupkom. Neznatna neslaganja koja su se pojavila u pojedinim vrijednostima su rezultat numeričke pogreške. Veća tačnost se nije mogla postići, pogotovo ako se uzme u obzir da je proračun proveden uz pomoć logaritamskog računala.



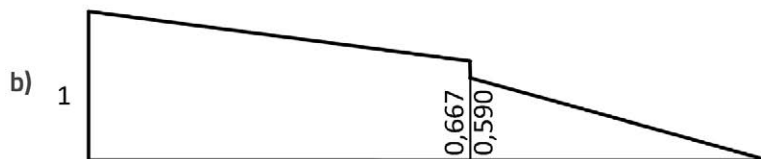
Sl. 17

M - dijagram



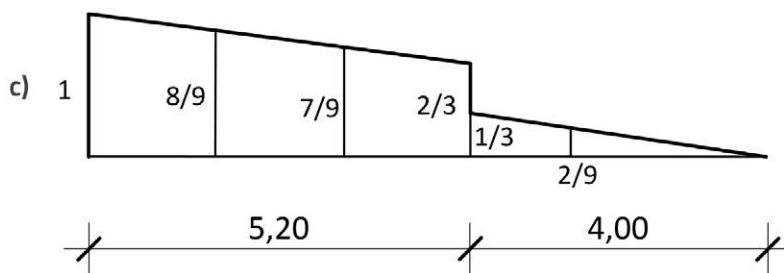
$$EJ_0 \delta_{xv} \left| \begin{array}{l} \frac{15,200 \cdot 5,2}{2} \cdot \frac{7}{9} = 30,74 \\ - \\ \frac{18,051 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{9} = -8,03 \\ \hline EJ_0 \delta_{xv} = -38,77 \end{array} \right.$$

m - dijagram



$$EJ_0 \delta_{xx} \left| \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot \frac{5,2}{2} \cdot \frac{7}{9} = 1,348 \\ 1 \cdot \frac{5,2}{2} \cdot \frac{8}{9} = 2,310 \\ \frac{0,590 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{9} = 0,252 \\ \hline EJ_0 \delta_{xx} = 3,920 \end{array} \right.$$

$\bar{m}$  - dijagram (reduciran)



Sl. 18

Uspoređivanjem prikazanih postupaka proračuna treba svakako prednost dati direktnom, pomoću kojeg dolazimo brže do rezultata. U pogledu konvergencije iteracionog postupka očita je prednost ovakvog okvira – poluokvira prema onom

sa svim vertikalnim stubovima. Razlog tome je što već kod početnih čvornih momenata imamo veličine različitih predznaka – momenti upetosti prečaka su pozitivni. Na taj način se znatno smanjuje neuravnoteženi dio momenta u čvoru.